Метод конечных элементов

Теория и применение к задачам теплопроводности

2026

УДК 519.63
ББК 22.19

Елюков А. С.

Метод конечных элементов: теория и применение к задачам теплопроводности.

Книга посвящена численному решению уравнений теплопроводности методом конечных элементов (МКЭ). Изложены аналитические решения одномерных, двумерных и трёхмерных краевых задач методом разделения переменных Фурье, рассмотрена вариационная постановка задачи и её дискретизация по методу Бубнова–Галёркина. Описаны матрицы жёсткости, демпфирования и векторы нагрузки для симплексных конечных элементов, алгоритм сборки глобальной системы и учёт граничных условий.

Для студентов, аспирантов и инженеров, знакомых с основами математического анализа и линейной алгебры.

© Елюков А. С., 2026

Это произведение распространяется на условиях лицензии
Creative Commons «Attribution-ShareAlike» 4.0 International
(«Атрибуция — На тех же условиях» 4.0 Всемирная, CC BY-SA 4.0).

Вы можете свободно распространять, адаптировать и использовать данный материал в любых целях, в том числе коммерческих, при условии указания авторства и сохранения той же лицензии для производных произведений.

Текст лицензии: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.ru

Оглавление

Оглавление **3**

1 Введение **5**
Общие моменты . . . 5
Уравнение . . . 5
Краевые условия . . . 8

2 Аналитическое решение краевых задач **11**
Общее аналитическое решение краевой задачи . . . 11
Ошибки постановки краевой задачи . . . 16
Одномерная краевая задача теплопроводности . . . 17
Двумерная краевая задача теплопроводности . . . 22
Трёхмерная краевая задача теплопроводности . . . 30

3 Решение больших разреженных матриц **41**
Структуры хранения . . . 41
Метод решения . . . 42
Предобуславливатели . . . 43

4 Разбиение геометрии на симплексы **46**
Сегментация . . . 46
Триангуляция . . . 47
Тетраэдризация . . . 53

5 Постановка задачи МКЭ **58**
Вариационная постановка задачи . . . 58
Форма решения . . . 59
Симплексы . . . 60
Пробные функции . . . 62

6 Вычисление матриц **66**
Матрица жёсткости 1D . . . 66
Матрица жёсткости 2D . . . 67
Матрица жёсткости 3D . . . 69
Матрица демпфирования 1D . . . 72
Матрица демпфирования 2D . . . 74
Матрица демпфирования 3D . . . 76
Вектор нагрузки 1D . . . 78
Вектор нагрузки 2D . . . 80

Вектор нагрузки 3D 82

7 Примеры **84**
Тепловое поле 1D, Дирихле 84
Тепловое поле 2D, Дирихле 85
Магнитное поле 2D 86
Электрическое поле трёхфазного кабеля 2D 87
Тепловое поле 3D, Дирихле 88

A Ряды Фурье **90**

B Специальные функции **92**

C Норма функции Бесселя (Дирихле) **95**

D Норма функции Бесселя (Нейман) **97**

E Уравнение Лежандра **100**

F Норма полиномов Лежандра **104**

G Уравнение Бесселя в сферических координатах **107**

H Норма сферической функции Бесселя (Нейман) **109**

I Функционал метода Бубнова–Галёркина **112**

J Пример применения функционала **116**

K Учёт граничных условий Дирихле **125**

L Учёт граничных условий Неймана **128**

M Триангуляция методом «разделяй и властвуй» **129**

N Эллиптические уравнения: сведение к стационарной задаче **134**

Литература **136**

Глава 1

Введение

Общие моменты

Цель этого руководства — изложить теорию метода конечных элементов на простых примерах, без избыточной математической строгости. Материал ориентирован на инженера со знанием основ высшей математики.

Дифференциальные уравнения в частных производных давно и успешно решаются как аналитическими методами — для простых геометрий, так и численными — для геометрий сложных. На практике геометрии, как правило, сложные, поэтому приходится решать численно. Среди численных методов наиболее распространены метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Метод конечных элементов предпочтительнее, поскольку допускает неравномерную сетку симплексов, что позволяет концентрировать вычислительные ресурсы там, где это действительно необходимо.

В этом руководстве рассматривается одно из наиболее простых уравнений — нестационарное уравнение теплопроводности. На практике вы, скорее всего, столкнётесь с более сложными задачами, однако если вы освоите изложенный здесь метод, более общие случаи станут значительно яснее. Все формулы настоятельно рекомендуется проверять самостоятельно.

Уравнение

Руководство посвящено тепловым полям, которые в общем случае являются нестационарными. Давайте рассмотрим малый объём dV внутри тела с границей S и внешней единичной нормалью $\overrightarrow{n}$ (рисунок 1.1). Идея проста: количество теплоты, накопленное в объёме за единицу времени, равно притоку теплоты через его границу плюс теплоте, выделившейся внутри за счёт внутренних источников. Это уравнение называется уравнением баланса энергии и следует из закона сохранения энергии. Через границу может быть не только приток теплоты, но и отток, что математически описывается как отрицательный приток, аналогично со внутренними источниками, которые могут быть потребителями.

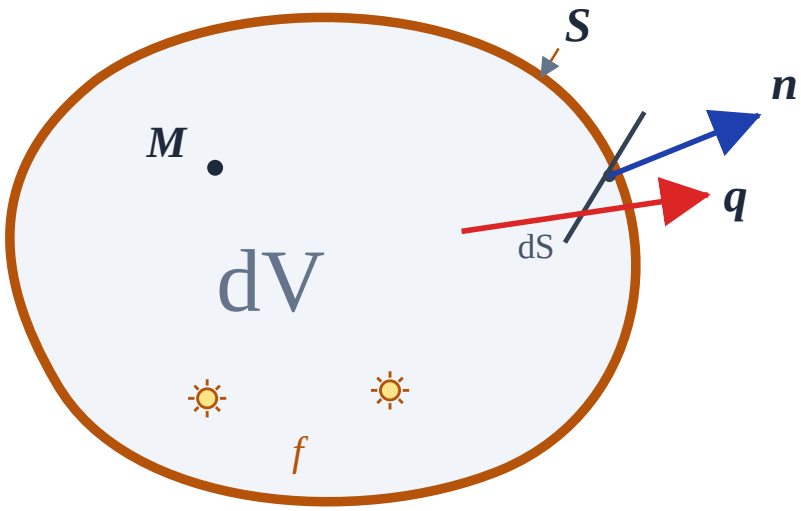

Рис. 1.1. Баланс энергии в малом объёме dV: тепловой поток $\overrightarrow{q}$ через границу S и внутренние источники тепла.

Известна формула тепловой энергии $dQ = c \cdot dm \cdot T$, где dQ — тепловая энергия малого объёма [Дж], c — удельная теплоёмкость [Дж/(кг · К)], dm — масса малого объёма [кг], T — температура [К]. Массу малого объёма dV можно записать через плотность ρ [кг/м^3] и сам объём dV [м^3]: $dm = \rho \cdot dV$. Тогда энергия, накопленная в этом малом объёме, равна $dQ = c \cdot \rho \cdot T \cdot dV$. Скорость изменения тепловой энергии объёма V равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c \cdot \rho \cdot T \, dV = \int_V c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \, dV. \tag{1.1}$$

Теперь опишем перенос тепла. Закон Фурье утверждает, что плотность теплового потока $\overrightarrow{q}$ [Вт/м^2] пропорциональна градиенту температуры и направлена против него — тепло течёт из горячих областей в холодные:

$$\overrightarrow{q} = -k \, \nabla T, \tag{1.2}$$

где k — коэффициент теплопроводности [Вт/(м · К)]. Знак минус как раз и отражает то, что поток направлен в сторону убывания температуры.

Соберём баланс энергии. Скорость изменения энергии объёма равна притоку теплоты через границу (поток внутрь — это $-\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n}$, так как $\overrightarrow{n}$ внешняя) плюс мощности внутренних источников с объёмной плотностью F [Вт/м^3]:

$$\int_V c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \, dV = -\oint_S \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n} \, dS + \int_V F \, dV. \tag{1.3}$$

Поверхностный интеграл неудобен — избавимся от него по теореме Остроградского-Гаусса, превратив поток через границу в интеграл от дивергенции по объёму:

$$\oint_S \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \overrightarrow{q} \, dV. \tag{1.4}$$

Подставив (1.4) в (1.3) и собрав всё под один интеграл, получим

$$\int_V \left(c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \overrightarrow{q} - F \right) dV = 0. \tag{1.5}$$

Объём V мы выбирали произвольно, а интеграл по любому такому объёму равен нулю — значит, нулю равно и само подынтегральное выражение. Подставив сюда закон Фурье (1.2), приходим к уравнению в дифференциальной форме:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \cdot \nabla T) + F. \tag{1.6}$$

Осталось воспользоваться сделанным выше предположением. Среда однородна и изотропна, поэтому коэффициент теплопроводности k одинаков во всех точках и по всем направлениям — его можно вынести за знак дивергенции, а $\operatorname{div} \nabla \equiv \Delta$ есть оператор Лапласа:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T + F. \tag{1.7}$$

Разделив обе части на $c \cdot \rho$ и обозначив $a^2 = \dfrac{k}{c \cdot \rho}$ — коэффициент температуропроводности [м^2/с] — и $f = \dfrac{F}{c \cdot \rho}$ — приведённую плотность источников [К/с], окончательно получаем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta T(M,t) + f(M,t), \tag{1.8}$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности, Δ — оператор Лапласа, M — геометрия, t — время [с], $T(M,t)$ — искомое решение — температурное поле [К], $f(M,t)$ — функция плотности тепловых источников внутри тела [К/с].

Уравнение (1.8) является неоднородным уравнением, так как в правой части присутствует функция плотности тепловых источников $f(M,t)$. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta T(M,t). \tag{1.9}$$

Важность однородного уравнения проявится в дальнейшем, когда мы будем получать общее решение методом разделения переменных Фурье.

Для тестовых задач будем рассматривать следующие системы координат и операторы Лапласа.

В одномерном случае используется декартова система координат $M \equiv x$:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{1.10}$$

В двумерном случае используется полярная система координат $M \equiv (r, \theta)$:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{1.11}$$

В трёхмерном случае используется сферическая система координат $M \equiv (r, \theta, \phi)$:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{1.12}$$

Краевые условия

Одного уравнения недостаточно, оно описывает только лишь связи между частицами самого объекта, но он же не существует, как конь в вакууме, поэтому надо как-то соединить с окружающим миром исследуемый объект. Краевые условия для нашего примера — это совокупность граничных условий и начального условия $T_0(M)$. С начальным условием всё понятно: оно описывает температуру в объекте M во всех внутренних точках и на границе S. Может быть случай, когда граница явно не указана, например мы рассчитываем электромагнитное поле над поверхностью земли, понятно, что рассматриваемой областью будет вся Вселенная, но мы её искусственно ограничиваем какими-то разумными пределами и адаптируем размер конечных элементов пропорционально удалённости от источника поля. Это пример преимущества МКЭ перед МКР, где нам пришлось бы рассчитывать поле там, где нам не особо интересно. Также отмечу, что мы не будем конкретизировать коэффициенты теплопроводности, функцию плотности — всё это будет в максимально общем виде, который сможет принять МКЭ; тип граничного условия, например, непосредственно повлияет на построение метода, и его нельзя упустить.

С начальным условием всё понятно, двинем к граничным условиям. Представим, что мы нагреваем стальной шарик в доменной печи, где температура 1000 К; можно принять, что шарик помещён в среду, на которую он не оказывает никакого влияния, и ограничивающая его сфера будет иметь температуру 1000 К на протяжении всего цикла нагрева. Такие условия описываются уравнением (1.13), которое называют граничным условием первого рода, или граничным условием Дирихле:

$$T(M,t) = \Phi(M,t), \quad M \in S. \tag{1.13}$$

То есть температура на поверхности задаётся некоторой функцией, которая в общем случае может зависеть от времени; частным случаем является константа (в нашем примере — 1000 К).

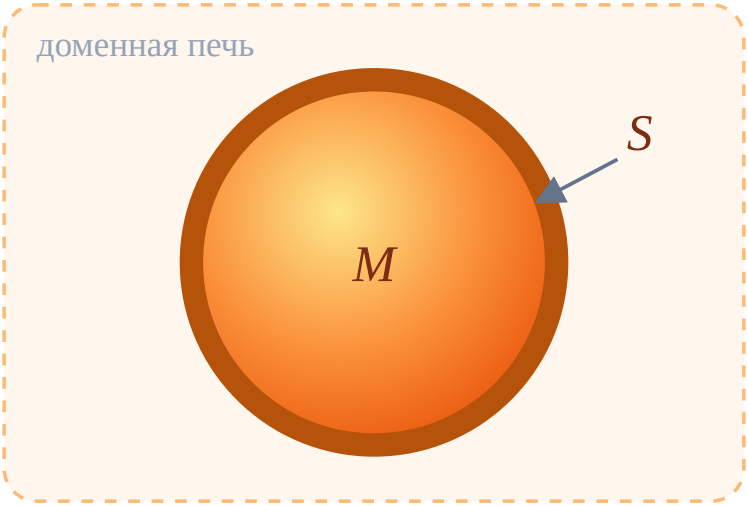

Рис. 1.2. Граничное условие первого рода (Дирихле): температура поверхности задана.

Теперь достанем шарик из печи нагретым до 1000 K и обернём его теплоизоляционным материалом. Шарик будет остывать примерно с одной скоростью, то есть темп остывания будет более-менее постоянным. Это граничное условие второго рода (Неймана), оно задаёт нормальный тепловой поток через поверхность (1.14):

$$\lambda \cdot \frac{\partial T(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} = \Phi(M,t), \quad M \in S, \tag{1.14}$$

где $\overrightarrow{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в точке M, λ — коэффициент теплопроводности. Данное условие применяется для случая, когда с поверхности идёт нагревание или охлаждение: если $\Phi(M,t) \equiv 0$, то поверхность изолирована, если $\Phi(M,t) < 0$, то идёт процесс охлаждения, если $\Phi(M,t) > 0$, то процесс нагревания.

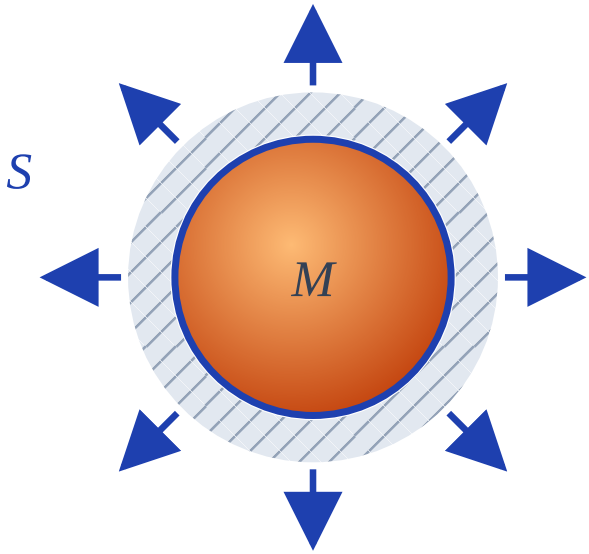

Рис. 1.3. Граничное условие второго рода (Нейман): задан поток через поверхность.

Есть ещё условие третьего рода (Робена). Пусть тот же шарик остывает на открытом воздухе в отсутствие ветра: тепло постепенно отводится с поверхности в окружающую среду, причём тем интенсивнее, чем сильнее шарик нагрет относительно воздуха. Такой теплообмен описывается уравнением (1.15):

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} = \alpha \left(T(M,t) - T_c \right), \quad M \in S, \tag{1.15}$$

где α — коэффициент теплоотдачи, T_c — температура окружающей среды. Поток через поверхность пропорционален разности температур — это закон охлаждения Ньютона.

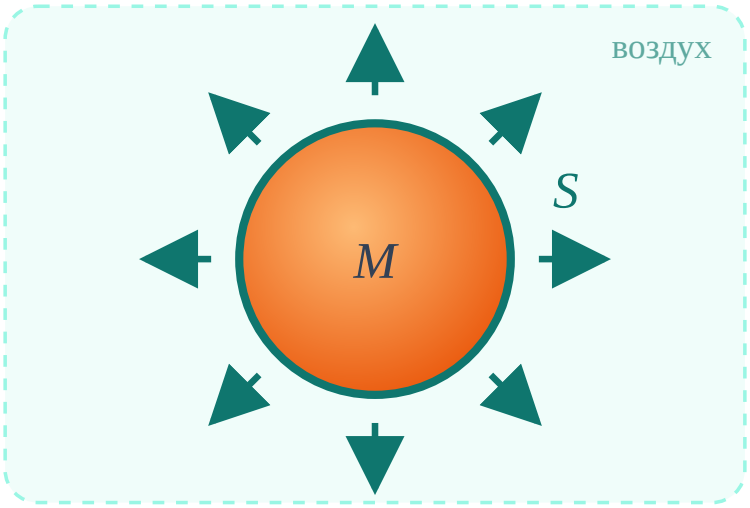

Рис. 1.4. Граничное условие третьего рода (Робен): конвективный теплообмен со средой.

В нашем руководстве мы ограничимся рассмотрением только первых двух родов граничных условий.

Соответствующие однородные граничные условия имеют вид

$$T(M,t) = 0, \quad M \in S. \tag{1.16}$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial T(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \quad M \in S. \tag{1.17}$$

Важность однородных граничных условий проявится в дальнейшем, когда мы будем получать общее решение методом разделения переменных Фурье.

Уравнение (1.8) с начальным условием $T_0(M)$ и граничным условием (1.13) называется краевой задачей Дирихле, а то же уравнение с тем же начальным условием, но граничным (1.14) называется краевой задачей Неймана. Мы рассмотрим обе задачи в нашем руководстве.

Глава 2

Аналитическое решение краевых задач

Общее аналитическое решение краевой задачи

В данной главе мы построим общее решение краевой задачи теплопроводности методом разделения переменных (метод Фурье). Но прежде сделаем несколько вводных замечаний. Мы хотим решить неоднородное уравнение (1.8) с начальным условием $T_0(M)$ и неоднородными граничными условиями (1.13) и (1.14). Решение в лоб может быть очень затруднительным, поэтому сначала надо избавиться от неоднородности граничных условий.

Представим решение в виде суммы $T(M,t) = \widehat{T}(M,t) + U(M,t)$, где $\widehat{T}(M,t)$ — решение задачи с однородными граничными условиями, а $U(M,t)$ — функция, которая будет вбирать в себя неоднородность граничных условий. Подставим сумму в уравнение (1.8) и получим

$$\frac{\partial \widehat{T}(M,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta \widehat{T}(M,t) + f(M,t) + a^2 \cdot \Delta U(M,t) - \frac{\partial U(M,t)}{\partial t}.$$

Вид функции $U(M,t)$ определим позже, когда будем рассматривать конкретные задачи, а пока заметим, что её можно выбрать в виде полинома, определённого с точностью до коэффициентов, которые находятся из граничных условий. Новая функция плотности тепловых источников имеет вид

$$\widehat{f}(M,t) = f(M,t) + a^2 \cdot \Delta U(M,t) - \frac{\partial U(M,t)}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Коэффициенты $U(M,t)$ для граничных условий Дирихле находятся подстановкой решения в граничные условия (1.13). Решение $\widehat{T}(M,t)$ удовлетворяет однородному условию Дирихле, то есть обращается в нуль на границе S, откуда

$$\widehat{T}(M,t) + U(M,t) = \Phi(M,t), \quad \widehat{T}(M,t) = 0 \;\Rightarrow\; U(M,t) = \Phi(M,t), \quad M \in S. \tag{2.2}$$

Аналогично, коэффициенты $U(M,t)$ для граничных условий Неймана находятся подстановкой решения в граничные условия (1.14). Решение $\widehat{T}(M,t)$ удовлетворяет

однородному условию Неймана, то есть его нормальная производная на границе S обращается в нуль, откуда

$$\frac{\partial \widehat{T}(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} + \frac{\partial U(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} = \Phi(M,t), \quad \frac{\partial \widehat{T}(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial U(M,t)}{\partial \overrightarrow{n}} = \Phi(M,t), \quad M \in S. \quad (2.3)$$

Не забудем и про начальное условие, которое никаких коэффициентов не вычисляет, а просто перепишется в виде

$$\widehat{T}(M,0) = T_0(M) - U(M,0). \quad (2.4)$$

После вычисления коэффициентов полиномиальной функции $U(M,t)$ неоднородная краевая задача с неоднородными граничными условиями сводится к неоднородной краевой задаче с однородными граничными условиями. Далее, чтобы несколько упростить запись, мы не будем писать hat над решением $\widehat{T}(M,t)$, начальным условием $\widehat{T}(M,0)$ и функцией источников $\widehat{f}(M,t)$, обозначая их просто $T(M,t)$, $T(M,0)$ и $f(M,t)$.

Теперь надо избавиться от неоднородности в самом уравнении, но в отличие от процедуры избавления от неоднородности в граничных условиях, тут пойдём с другой стороны: сначала решим однородное уравнение, а потом на его основе скажем, как решить неоднородное. Чтобы понять, что такой переход возможен, будем базироваться на *теореме разложимости Стеклова*, ведь именно она даёт тот базис, по которому всё дальше и раскладывается. Решив однородную задачу, мы получим набор её собственных функций. Теорема Стеклова утверждает, что эта система полна: всякая функция с непрерывной первой и кусочно-непрерывной второй производной, удовлетворяющая тем же однородным граничным условиям, например (1.16) или (1.17), разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям однородной задачи (1.9). А значит, в том же базисе можно представить и искомое решение неоднородной задачи, и функцию источников: проектируя неоднородное уравнение на каждую собственную функцию и пользуясь их ортогональностью, мы сведём его к независимым обыкновенным уравнениям для коэффициентов — то есть построим решение неоднородной задачи на решении однородной.

Воспользуемся методом разделения переменных (метод Фурье). Будем искать решение уравнения (1.9) в виде суммы произведений $T(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(M) \cdot \phi_n(t)$, где каждое слагаемое — произведение функции только от геометрии на функцию только от времени. Уравнение линейно и однородно, поэтому достаточно потребовать, чтобы ему удовлетворяло каждое слагаемое в отдельности; рассмотрим одно произведение $\Psi(M) \cdot \phi(t)$ и подставим его в уравнение (1.9) — получим

$$\Psi(M) \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta\Psi(M) \cdot \phi(t), \quad (2.5)$$

что после деления на $\Psi(M) \cdot \phi(t)$ приводит к

$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{a^2 \cdot \phi(t)} = -\gamma^2 = \Delta\Psi(M) \cdot \frac{1}{\Psi(M)}, \quad (2.6)$$

где γ^2 — константа. Действительно, левая часть равенства зависит только от времени, а правая — только от геометрии; функция времени может совпадать с функцией геометрии сразу при всех значениях времени и во всех точках области лишь

тогда, когда обе они равны одной и той же постоянной — в этом и состоит суть разделения переменных. Знак минус перед ней выбран так, чтобы решение сходилось, в чём несложно убедиться, рассмотрев уравнение для времени. Конкретные значения этой константы мы определим дальше — из уравнения для геометрии.

Запишем уравнение для времени и его решение

$$\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\cdot\frac{1}{a^2\cdot\phi(t)}=-\gamma^2$$

$$\phi(t)=A\cdot e^{-a^2\cdot\gamma^2\cdot t}, \tag{2.7}$$

где A — константа.

Уравнение для геометрии имеет вид

$$\Delta\Psi(M)+\gamma^2\cdot\Psi(M)=0. \tag{2.8}$$

Это однородное уравнение Гельмгольца. Для того, чтобы решить его, необходимо задать граничные условия. Подставим произведение $\Psi(M)\cdot\phi(t)$ в граничные условия (1.16) и (1.17) соответственно и получим для условий Дирихле

$$\Psi(M)\cdot\phi(t)=0\Rightarrow\Psi(M)=0,\quad M\in S, \tag{2.9}$$

и для условий Неймана

$$\frac{\partial\Psi(M)}{\partial\overrightarrow{n}}\cdot\phi(t)=0\Rightarrow\frac{\partial\Psi(M)}{\partial\overrightarrow{n}}=0,\quad M\in S. \tag{2.10}$$

Понятно, что случай, когда $\phi(t)=0$, не интересен, так как мы строим условия для геометрии, а не для времени. Уравнение (2.8) с граничными условиями (2.9) и (2.10) называется задачей Штурма — Лиувилля. Она хорошо изучена, и далее мы будем пользоваться её известными свойствами без доказательства (их можно найти в литературе). У этой задачи не одно, а счётное множество собственных значений, и каждому из них отвечает своя собственная функция; собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, взаимно ортогональны и образуют полную систему.

Итак, задача Штурма — Лиувилля дала счётный набор собственных значений γ_n^2 и отвечающих им собственных функций $\Psi_n(M)$. Для моды с номером n уравнение для времени даёт множитель $e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}$, так что $\Psi_n(M)\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}$ — частное решение уравнения (1.9). Возвращаясь к сумме, с которой мы начали, и пользуясь линейностью, получаем общее решение

$$T(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\Psi_n(M)\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}, \tag{2.11}$$

где c_n — произвольные постоянные, вобравшие постоянные множители обеих частей каждого слагаемого. Полнота системы собственных функций (теорема Стеклова) гарантирует, что такой суммой можно представить любое допустимое решение.

Теперь надо определить коэффициенты c_n, для этого заметим, что решение должно удовлетворять начальному условию (2.4), а значит

$$T(M,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cdot\Psi_n(M)=T_0(M).$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты c_n благодаря взаимной ортогональности собственных функций определяются однозначно — как коэффициенты разложения функции $T_0(M)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\Psi_n(M)$ — по общей формуле (A.4) из приложения «Ряды Фурье»

$$c_n = \frac{1}{\|\Psi_n(M)\|^2} \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot T_0(M) \cdot \Psi_n(M)\, dG, \tag{2.12}$$

где $\|\Psi_n(M)\|^2$ — квадрат нормы собственной функции, определяемый формулой (A.5).

Таким образом, мы получили решение уравнения (1.9) с начальным условием $T_0(M)$ и однородными граничными условиями

$$T(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M)}{\|\Psi_n(M)\|^2} \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot t} \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot T_0(M) \cdot \Psi_n(M)\, dG. \tag{2.13}$$

Теперь мы можем переходить к решению неоднородного уравнения, которое, как мы уже говорили, в соответствии с теоремой разложимости Стеклова, может быть построено на основе решения однородной задачи. Для этого разложим функцию плотности тепловых источников $f(M,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\Psi_n(M)$

$$f(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t) \cdot \Psi_n(M), \tag{2.14}$$

где $\mu_n(t)$ — коэффициенты разложения функции $f(M,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\Psi_n(M)$

$$\mu_n(t) = \frac{1}{\|\Psi_n(M)\|^2} \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot f(M,t) \cdot \Psi_n(M)\, dG.$$

Будем искать решение неоднородного уравнения в том же виде — суммой произведений $\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(M) \cdot \phi_n(t)$. Подставим её вместе с разложением (2.14) в неоднородное уравнение (1.8); поскольку $\Delta\Psi_n(M) = -\gamma_n^2 \cdot \Psi_n(M)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(M) \cdot \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial t} = -a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \cdot \Psi_n(M) \cdot \phi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(t) \cdot \Psi_n(M).$$

Геометрическая часть осталась прежней — это те же собственные функции $\Psi_n(M)$. Приравнивая коэффициенты при каждой $\Psi_n(M)$ (это законно в силу ортогональности), убеждаемся, что изменилось только уравнение для времени — в нём добавилось слагаемое $\mu_n(t)$:

$$\frac{\partial \phi_n(t)}{\partial t} = -a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot \phi_n(t) + \mu_n(t). \tag{2.15}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\phi_n(t) = c_n \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot t} + \int_0^t \mu_n(\tau) \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot (t-\tau)}\, d\tau, \tag{2.16}$$

где c_n — произвольные коэффициенты, равные коэффициентам, определённым в решении однородной задачи, так как вычисляются с помощью начального условия, а при $t = 0$ интеграл равен нулю.

Решение неоднородного уравнения с однородными граничными условиями примет вид

$$\begin{aligned} &T(M,t) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M)}{\|\Psi_n(M)\|^2} \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot t} \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot T_0(M) \cdot \Psi_n(M)\, dG + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M)}{\|\Psi_n(M)\|^2} \cdot \int_0^t e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot (t-\tau)} \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot f(M,\tau) \cdot \Psi_n(M)\, dG\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Можно было бы получить и решение неоднородного уравнения с неоднородными граничными условиями, но это достаточно громоздко — далее уже на конкретных примерах построим конечное решение.

При решении уравнений стационарных, а электромагнитное поле в общем-то стационарное, если не рассматриваются релятивистские эффекты, нам надо получить общее решение, без учёта времени, а для этого выполним предельный переход $t \to \infty$ в решении нестационарного уравнения. Заметим, что первый член решения сразу занулится, так как экспонента будет стремиться к нулю и начальные условия пропадут из решения, что более чем очевидно. Функция плотности тепловых источников перестаёт быть зависимой от времени априори. Остаётся только прояснить интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot (t-\tau)}\, d\tau &= \frac{1}{a^2 \cdot \gamma_n^2} \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot (t-\tau)} \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{a^2 \cdot \gamma_n^2} \cdot (1 - e^{-a^2 \cdot \gamma_n^2 \cdot t}) \to \frac{1}{a^2 \cdot \gamma_n^2} \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \gamma_n \neq 0. \end{aligned}$$

Запишем общее решение для стационарного уравнения

$$\begin{aligned} &T(M) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M)}{\|\Psi_n(M)\|^2} \cdot \frac{1}{a^2 \cdot \gamma_n^2} \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot f(M) \cdot \Psi_n(M)\, dG, \quad \gamma_n \neq 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

А что делать, если $\gamma_n = 0$? На самом деле этот случай возможен, но его лучше рассматривать отдельно для каждого уравнения, что и сделаем в соответствующих главах.

Ошибки постановки краевой задачи

Краевую задачу мало решить, её надо решить правильно, а для этого надо избежать ошибок на этапе постановки задачи как минимум. Мы рассмотрим пару типовых неточностей.

Согласование начальных и граничных условий

Первая типичная ошибка — задать начальное и граничные условия, которые не согласуются друг с другом на стыке. В нестационарной задаче решение ищется при $t \geq 0$ и $M \in G$; на границе S при $t = 0$ — начальное и граничное условия описывают одну и ту же точку. Если они дают там разные значения, в этой точке возникает разрыв.

Рассмотрим задачу Дирихле с начальным условием $T(M, 0) = T_0(M)$ и граничным $T(M, t) = \Phi(M, t)$, $M \in S$. Условие согласования нулевого порядка требует совпадения данных

$$T_0(M) = \Phi(M, 0), \quad M \in S. \tag{2.19}$$

Если условие (2.19) нарушено, ряд Фурье решения подходит к границе с разными пределами по t и по S: сходимость неравномерна, появляется явление Гиббса, и классического (гладкого) решения не существует.

Но и выполнения (2.19) недостаточно. Само уравнение $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta T$ связывает производные данных: продифференцировав граничное условие по времени и взяв $t = 0$, получаем условие согласования первого порядка

$$\frac{\partial \Phi(M, 0)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta T_0(M), \quad M \in S. \tag{2.20}$$

Аналогично строятся условия более высоких порядков; для решения класса C^k нужно выполнение условий согласования примерно до порядка k. Их нарушение не делает задачу неразрешимой, но ограничивает гладкость решения — об этом легко забыть, формально выписав «любые» $T_0(M)$ и $\Phi(M, t)$. Для задачи Неймана условия согласования те же, но записываются для нормальной производной:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \overrightarrow{n}} = \Phi(M, 0), \quad M \in S.$$

Условие разрешимости стационарной задачи Неймана

А здесь поговорим еще об условии разрешимости стационарной задачи Неймана. Во-первых, следует заметить, что решение задачи Неймана возможно с точностью до постоянной, которую можно определить для любой точки геометрии. Но главная проблема состоит в том, что для задачи Неймана важно соблюсти условие равенства нулю суммы потоков энергии входящих, исходящих, источников и утечек внутри геометрии. Если это условие не будет соблюдено, то решение будет иметь некорректный физический смысл. Например, что будет, если поток тепла будет входить в стержень, а вторая сторона его будет изолирована? Тогда температура будет бесконечно возрастать в установившемся режиме, которого по сути-то и не будет. На практике, конечно, такого быть не может в силу того, что стержень не одномерный и утечки тепла возможны через боковую поверхность, да и условия Неймана в чистом виде не существуют, но тем не менее модель должна быть корректной. Рассмотрим пример стационарной задачи Неймана. Производная по времени в уравнении (1.8) при этом обращается в нуль, и оно принимает вид

$$a^2 \cdot \Delta T(M) + f(M) = 0. \tag{2.21}$$

Краевые условия Неймана для него задаются граничным условием (1.14).
Известна вторая формула Грина

$$\iiint_G (U(M) \cdot \Delta T(M) - T(M) \cdot \Delta U(M))\, dM = \iint_S \left(U(M) \cdot \frac{\partial T(M)}{\partial \overrightarrow{n}} - T(M) \cdot \frac{\partial U(M)}{\partial \overrightarrow{n}} \right) dS.$$

Если принять $U(M) = -1$, то получим

$$-\iiint_G \Delta T(M)\, dM = -\iint_S \frac{\partial T(M)}{\partial \overrightarrow{n}}\, dS.$$

Теперь подставим сюда уравнение (2.21) и граничные условия (1.14)

$$\iiint_G f(M)\, dM = -a^2 \cdot \iint_S \Phi(M)\, dS, \tag{2.22}$$

то есть количество тепла, выделяемое источниками внутри геометрии, равно количеству тепла, уходящему через границу. Если условие нарушено, то решение будет иметь некорректный физический смысл.

Одномерная краевая задача теплопроводности

Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности на отрезке от α до β. Уравнение теплопроводности (1.8) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{2.23}$$

Краевые условия Дирихле (1.13) в одномерном случае имеют вид

$$\begin{cases} T(x,0) = T_0(x), \\ T(\alpha,t) = \Phi_\alpha(t), \\ T(\beta,t) = \Phi_\beta(t) \end{cases} \tag{2.24}$$

Для избавления от неоднородности введем $T(x,t) = \widehat{T}(x,t) + U(x,t)$, выберем функцию $U(x,t) = a_1(t) + a_2(t) \cdot x$ и вычислим коэффициенты, в соответствии с (2.2)

$$\begin{cases} \Phi_\alpha(t) - a_1(t) - a_2(t) \cdot \alpha = 0 \\ \Phi_\beta(t) - a_1(t) - a_2(t) \cdot \beta = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} a_1(t) = \dfrac{\Phi_\alpha(t) \cdot \beta - \Phi_\beta(t) \cdot \alpha}{\beta - \alpha} \\ a_2(t) = \dfrac{\Phi_\beta(t) - \Phi_\alpha(t)}{\beta - \alpha} \end{cases} \tag{2.26}$$

Тогда уравнение (2.23) и краевые условия (2.24) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{T}(x,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 \widehat{T}(x,t)}{\partial x^2} + \widehat{f}(x,t), \\ \widehat{T}(x,0) = T_0(x) - a_1(0) - a_2(0) \cdot x, \\ \widehat{T}(\alpha,t) = 0, \widehat{T}(\beta,t) = 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

где $\widehat{f}(x,t) = f(x,t) - \dfrac{da_1(t)}{dt} - \dfrac{da_2(t)}{dt} \cdot x$.

Краевые условия Неймана (1.14) в одномерном случае имеют вид

$$\begin{cases} T(x,0) = T_0(x), \\ \left.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\alpha} = \Phi_\alpha(t), \\ \left.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\beta} = \Phi_\beta(t) \end{cases} \tag{2.28}$$

Для избавления от неоднородности введем $T(x,t) = \widehat{T}(x,t) + U(x,t)$, выберем функцию $U(x,t) = a_1(t) \cdot x + a_2(t) \cdot x^2$ и вычислим коэффициенты, в соответствии с (2.3)

$$\begin{cases} \Phi_\alpha(t) - a_1(t) - 2 \cdot a_2(t) \cdot \alpha = 0 \\ \Phi_\beta(t) - a_1(t) - 2 \cdot a_2(t) \cdot \beta = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} a_1(t) = \dfrac{\Phi_\alpha(t) \cdot \beta - \Phi_\beta(t) \cdot \alpha}{\beta - \alpha} \\ a_2(t) = \dfrac{\Phi_\beta(t) - \Phi_\alpha(t)}{2 \cdot (\beta - \alpha)} \end{cases} \tag{2.30}$$

Тогда уравнение (2.23) и краевые условия (2.28) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{T}(x,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 \widehat{T}(x,t)}{\partial x^2} + \widehat{f}(x,t), \\ \widehat{T}(x,0) = T_0(x) - a_1(0) \cdot x - a_2(0) \cdot x^2, \\ \left.\dfrac{\partial \widehat{T}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\alpha} = 0, \left.\dfrac{\partial \widehat{T}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\beta} = 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

где $\widehat{f}(x,t) = f(x,t) - \dfrac{da_1(t)}{dt} \cdot x - \dfrac{da_2(t)}{dt} \cdot x^2 + 2 \cdot a^2 \cdot a_2(t)$.

Уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \gamma^2 \cdot \Psi(x) = 0. \tag{2.32}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi(x) = c_1 \cdot \cos[\gamma \cdot (x - \alpha)] + c_2 \cdot \sin[\gamma \cdot (x - \alpha)], \tag{2.33}$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты, определяемые из граничных условий, а вес, обеспечивающий ортогональность собственных функций, $\rho(x) = 1$.

Подставим общее решение в граничные условия (2.27) и получим

$$\begin{cases} c_1 \cdot \cos(\gamma \cdot 0) + c_2 \cdot \sin(\gamma \cdot 0) = 0, \\ c_1 \cdot \cos[\gamma \cdot (\beta - \alpha)] + c_2 \cdot \sin[\gamma \cdot (\beta - \alpha)] = 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Понятно, что из первого уравнения $c_1 = 0$ и решение имеет смысл только тогда, когда $c_2 \neq 0$, что возможно только тогда, когда $\sin[\gamma \cdot (\beta - \alpha)] = 0$

$$\gamma \cdot (\beta - \alpha) = \pi \cdot n, n \in (1..\infty). \tag{2.35}$$

Нулевое и отрицательные значения n не годятся: при $n = 0$ имеем $\gamma = 0$, и $\Psi(x) = c_2 \cdot \sin[0 \cdot (x - \alpha)] \equiv 0$ — тождественный нуль, не являющийся собственной функцией; отрицательным же n отвечает то же собственное значение γ^2 (ведь $\gamma_{-n} = -\gamma_n$), а $\sin[-\gamma_n \cdot (x-\alpha)] = -\sin[\gamma_n \cdot (x-\alpha)]$ линейно зависимо с решением для положительного n и нового вклада не даёт. Поэтому $n \in (1..\infty)$.

Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_n = \dfrac{\pi \cdot n}{\beta - \alpha}, n \in (1..\infty), \\ \Psi_n(x) = c_{2n} \cdot \sin\left[\dfrac{\pi \cdot n}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)\right], \end{cases} \tag{2.36}$$

где c_{2n} — произвольный постоянный множитель: собственная функция определена с точностью до него. Положим $c_{2n} = 1$ — этот множитель всё равно вбирается в коэффициенты разложения T_{0n} и f_n, как и в общем решении.

Для разложения функций в ряд Фурье по $\Psi_n(x)$ необходимо вычислить норму $\|\Psi_n(x)\|^2$, вес для декартовых координат $\rho(x) = 1$.

$$\|\Psi_n(x)\|^2 = \int_\alpha^\beta \Psi_n(x)^2 \, dx = \int_\alpha^\beta \sin\left[\frac{\pi \cdot n}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)\right]^2 dx = \frac{\beta - \alpha}{2}. \tag{2.37}$$

Теперь подставим решение в граничные условия (2.31) и получим

$$\begin{cases} -c_1 \cdot \sin(\gamma_n \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\gamma_n \cdot 0) = 0, \\ -c_1 \cdot \sin[\gamma_n \cdot (\beta - \alpha)] + c_2 \cdot \cos[\gamma_n \cdot (\beta - \alpha)] = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Понятно, что из первого уравнения $c_2 = 0$ и решение имеет смысл только тогда, когда $\sin[\gamma_n \cdot (\beta - \alpha)] = 0$

$$\gamma_n \cdot (\beta - \alpha) = \pi \cdot n, n \in (0..\infty). \tag{2.39}$$

Здесь, в отличие от задачи Дирихле, мода $n = 0$ сохраняется: при $\gamma_0 = 0$ собственная функция $\Psi_0(x) = c_{10} \cdot \cos[0 \cdot (x - \alpha)] = c_{10}$ — ненулевая постоянная, то есть полноценная собственная функция (постоянная мода). Поэтому индексация начинается с нуля.

Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_n = \dfrac{\pi \cdot n}{\beta - \alpha}, n \in (0..\infty), \\ \Psi_n(x) = c_{1n} \cdot \cos\left[\dfrac{\pi \cdot n}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)\right], \end{cases} \tag{2.40}$$

где c_{1n} — произвольный постоянный множитель: собственная функция определена с точностью до него. Положим $c_{1n} = 1$ — этот множитель всё равно вбирается в коэффициенты разложения T_{0n} и f_n, как и в общем решении.

Норму собственных функций вычислим так же, как для случая с синусом, понизив степень косинуса по формуле половинного угла. Для $n \geq 1$

$$\|\Psi_n(x)\|^2 = \int_\alpha^\beta \Psi_n(x)^2\,dx = \int_\alpha^\beta \cos\left[\gamma_n \cdot (x-\alpha)\right]^2\,dx$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{1+\cos\left[2\cdot\gamma_n\cdot(x-\alpha)\right]}{2}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad n \in (1..\infty), \quad (2.41)$$

поскольку интеграл от косинуса по целому числу полупериодов равен нулю: $\sin\left[2\cdot\gamma_n\cdot(\beta-\alpha)\right] = \sin(2\cdot\pi\cdot n) = 0$. Особый случай $n = 0$ (при $\gamma_0 = 0$ собственная функция $\Psi_0(x) = 1$) вычислим отдельно

$$\|\Psi_0(x)\|^2 = \int_\alpha^\beta \Psi_0(x)^2\,dx = \int_\alpha^\beta 1\,dx = \beta-\alpha. \quad (2.42)$$

Финальное решение одномерной краевой задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями примет вид

$$a_1(t) = \frac{\Phi_\alpha(t)\cdot\beta - \Phi_\beta(t)\cdot\alpha}{\beta-\alpha}, \quad a_2(t) = \frac{\Phi_\beta(t)-\Phi_\alpha(t)}{\beta-\alpha},$$
$$U(x,t) = a_1(t) + a_2(t)\cdot x,$$
$$\widehat{T}(x,0) = T_0(x) - U(x,0),$$
$$\widehat{f}(x,t) = f(x,t) - \frac{da_1(t)}{dt} - \frac{da_2(t)}{dt}\cdot x,$$
$$\gamma_n = \frac{\pi\cdot n}{\beta-\alpha}, \quad \Psi_n(x) = \sin\left[\gamma_n\cdot(x-\alpha)\right], \quad \|\Psi_n(x)\|^2 = \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad n\in(1..\infty), \quad (2.43)$$
$$T_{0n} = \int_\alpha^\beta \widehat{T}(\omega,0)\cdot\Psi_n(\omega)\,d\omega, \quad f_n(\tau) = \int_\alpha^\beta \widehat{f}(\omega,\tau)\cdot\Psi_n(\omega)\,d\omega,$$
$$\widehat{T}(x,t) = \frac{2}{\beta-\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}\cdot\left[T_{0n} + \int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_n^2\cdot\tau}\cdot f_n(\tau)\,d\tau\right],$$
$$T(x,t) = U(x,t) + \widehat{T}(x,t).$$

В задаче Неймана, в отличие от Дирихле, спектр содержит нулевую моду ($\gamma_0 = 0$, $\Psi_0(x) = 1$) — случай $\gamma_n = 0$, который в общем решении (2.18) был оставлен для отдельного рассмотрения; именно она даёт первое (незатухающее) слагаемое. Финальное решение одномерной краевой задачи Неймана с неоднородными граничными условиями примет вид

$$
\begin{aligned}
&a_1(t) = \frac{\Phi_\alpha(t)\cdot\beta - \Phi_\beta(t)\cdot\alpha}{\beta-\alpha}, \quad a_2(t) = \frac{\Phi_\beta(t) - \Phi_\alpha(t)}{2\cdot(\beta-\alpha)},\\
&U(x,t) = a_1(t)\cdot x + a_2(t)\cdot x^2,\\
&\widehat{T}(x,0) = T_0(x) - U(x,0),\\
&\widehat{f}(x,t) = f(x,t) - \frac{da_1(t)}{dt}\cdot x - \frac{da_2(t)}{dt}\cdot x^2 + 2\cdot a^2\cdot a_2(t),\\
&\gamma_n = \frac{\pi\cdot n}{\beta-\alpha}, \quad \Psi_n(x) = \cos\left[\gamma_n\cdot(x-\alpha)\right], \quad n\in(0..\infty),\\
&\|\Psi_n(x)\|^2 = \frac{\beta-\alpha}{2} \quad (n\ge 1), \qquad \|\Psi_0(x)\|^2 = \beta-\alpha,\\
&T_{0n} = \int_\alpha^\beta \widehat{T}(\omega,0)\cdot\Psi_n(\omega)\,d\omega, \quad f_n(\tau) = \int_\alpha^\beta \widehat{f}(\omega,\tau)\cdot\Psi_n(\omega)\,d\omega,\\
&\widehat{T}(x,t) = \frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\left[T_{00} + \int_0^t f_0(\tau)\,d\tau\right] + \frac{2}{\beta-\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}\cdot\left[T_{0n} + \int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_n^2\cdot\tau}\cdot f_n(\tau)\,d\tau\right],\\
&T(x,t) = U(x,t) + \widehat{T}(x,t).
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Чтобы получить стационарные решения, устремим в найденных решениях время к бесконечности ($t\to\infty$), как это сделано для общего случая в (2.18). Слагаемое с начальным условием занулится, поскольку $e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}\to 0$; источники и граничные условия перестают зависеть от времени, а интеграл по времени для $\gamma_n\ne 0$ даёт множитель $\frac{1}{a^2\cdot\gamma_n^2}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot(t-\tau)}\,d\tau &= \frac{1}{a^2\cdot\gamma_n^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot(t-\tau)}\Big|_0^t\\
&= \frac{1}{a^2\cdot\gamma_n^2}\cdot\left(1 - e^{-a^2\cdot\gamma_n^2\cdot t}\right) \to \frac{1}{a^2\cdot\gamma_n^2} \quad \text{при} \quad t\to\infty, \quad \gamma_n \ne 0.
\end{aligned}
$$

Стационарное решение одномерной краевой задачи Дирихле примет вид

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \frac{\Phi_\alpha\cdot\beta - \Phi_\beta\cdot\alpha}{\beta-\alpha}, \quad a_2 = \frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta-\alpha}, \quad U(x) = a_1 + a_2\cdot x,\\
&\gamma_n = \frac{\pi\cdot n}{\beta-\alpha}, \quad \Psi_n(x) = \sin\left[\gamma_n\cdot(x-\alpha)\right], \quad n\in(1..\infty),\\
&f_n = \int_\alpha^\beta f(\omega)\cdot\Psi_n(\omega)\,d\omega,\\
&T(x) = U(x) + \frac{2}{\beta-\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n(x)}{a^2\cdot\gamma_n^2}\cdot f_n.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Стационарное решение одномерной краевой задачи Неймана не такое простое. В отличие от задачи Дирихле, чисто неймановская стационарная задача разрешима не всегда. Приведённая функция $\widehat{T}$ удовлетворяет однородным условиям Неймана $\widehat{T}'(\alpha) = \widehat{T}'(\beta) = 0$ и стационарному уравнению $a^2\cdot\widehat{T}''(x) + \widehat{f}(x) = 0$. Проинтегрируем его по отрезку $[\alpha,\beta]$:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\alpha^\beta \left(a^2\cdot\widehat{T}''(x) + \widehat{f}(x)\right)dx &= a^2\cdot\left[\widehat{T}'(\beta) - \widehat{T}'(\alpha)\right]\\
&+ \int_\alpha^\beta \widehat{f}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \widehat{f}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Граничный член обратился в нуль в силу однородных условий Неймана, и осталось условие разрешимости (2.22): $\int_\alpha^\beta \widehat{f}(\omega)\,d\omega = 0$ — суммарный приведённый источник должен обращаться в нуль (иначе тепло накапливается, среднее неограниченно растёт и стационара нет). При выполнении этого условия решение определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной C: ей отвечает нулевая мода ($\gamma_0 = 0$, $\Psi_0(x) = 1$), амплитуда которой стационарным уравнением не фиксируется. С этой оговоркой решение примет вид

$$\begin{aligned}
&a_1 = \frac{\Phi_\alpha \cdot \beta - \Phi_\beta \cdot \alpha}{\beta - \alpha}, \quad a_2 = \frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{2 \cdot (\beta - \alpha)}, \quad U(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, \\
&\widehat{f}(x) = f(x) + 2 \cdot a^2 \cdot a_2, \\
&\gamma_n = \frac{\pi \cdot n}{\beta - \alpha}, \quad \Psi_n(x) = \cos\left[\gamma_n \cdot (x - \alpha)\right], \quad n \in (1..\infty), \\
&f_n = \int_\alpha^\beta \widehat{f}(\omega) \cdot \Psi_n(\omega)\,d\omega, \\
&T(x) = U(x) + \frac{2}{\beta - \alpha} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(x)}{a^2 \cdot \gamma_n^2} \cdot f_n + C, \quad C = \text{const}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Двумерная краевая задача теплопроводности

Рассмотрим двумерную несимметричную задачу теплопроводности в круге радиуса R. Уравнение теплопроводности (1.8) в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial r^2} + a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial r} + a^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} + f(r,\theta,t). \tag{2.47}$$

Краевые условия Дирихле (1.13) в двумерном случае имеют вид

$$\begin{cases} T(r,\theta,0) = T_0(r,\theta), \\ T(R,\theta,t) = \Phi(\theta,t), \\ T(r,\theta,t) = T(r,\theta+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.48}$$

где $T_0(r,\theta)$ — начальное условие, $\Phi(\theta,t)$ — граничное условие, которое, разумеется, периодично по θ.

Для избавления от неоднородности введём $T(r,\theta,t) = \widehat{T}(r,\theta,t) + U(\theta,t)$, выберем функцию $U(\theta,t) = \Phi(\theta,t)$, в соответствии с (2.2). Тогда уравнение (2.47) и краевые условия (2.48) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial r^2} + a^2 \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial r} + a^2 \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} + \widehat{f}(r,\theta,t), \\ \widehat{T}(r,\theta,0) = T_0(r,\theta) - U(\theta,0), \\ \widehat{T}(R,\theta,t) = 0, \\ \widehat{T}(r,\theta,t) = \widehat{T}(r,\theta+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.49}$$

где $\widehat{f}(r,\theta,t) = f(r,\theta,t) - \dfrac{\partial U(\theta,t)}{\partial t} + a^2 \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 U(\theta,t)}{\partial \theta^2}$.

Краевые условия Неймана (1.14) в двумерном случае имеют вид

$$\begin{cases} T(r,\theta,0) = T_0(r,\theta), \\ \left.\dfrac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R} = \Phi(\theta,t), \\ T(r,\theta,t) = T(r,\theta+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.50}$$

где $\left.\dfrac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R}$ — нормальная производная температуры на окружности радиуса R; направление нормали совпадает с направлением координаты r.

Для избавления от неоднородности введём $T(r,\theta,t) = \widehat{T}(r,\theta,t) + U(r,\theta,t)$, выберем функцию $U(r,\theta,t) = \Phi(\theta,t) \cdot r$ — она удовлетворяет условию (2.3): $\left.\dfrac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R} = \Phi(\theta,t)$. Тогда уравнение (2.47) и краевые условия (2.50) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial r^2} + a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial r} + a^2 \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} + \widehat{f}(r,\theta,t), \\ \widehat{T}(r,\theta,0) = T_0(r,\theta) - U(r,\theta,0), \\ \left.\dfrac{\partial \widehat{T}(r,\theta,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R} = 0, \\ \widehat{T}(r,\theta,t) = \widehat{T}(r,\theta+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.51}$$

где $\widehat{f}(r,\theta,t) = f(r,\theta,t) - \dfrac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial t} + a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial r} + a^2 \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 U(r,\theta,t)}{\partial \theta^2}$.

Уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(r,\theta)}{\partial \theta^2} + \gamma^2 \cdot \Psi(r,\theta) = 0. \tag{2.52}$$

Представим функцию $\Psi(r,\theta)$ в виде произведения двух функций $\Psi(r,\theta) = \Lambda(r) \cdot \Upsilon(\theta)$, подставим в уравнение (2.52) и проведём преобразования

$$\frac{d^2\Lambda(r)}{dr^2} \cdot \Upsilon(\theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\Lambda(r)}{dr} \cdot \Upsilon(\theta) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2\Upsilon(\theta)}{d\theta^2} \cdot \Lambda(r) + \gamma^2 \cdot \Lambda(r) \cdot \Upsilon(\theta) = 0,$$

$$r^2 \cdot \frac{d^2\Lambda(r)}{dr^2} \cdot \Upsilon(\theta) + r \cdot \frac{d\Lambda(r)}{dr} \cdot \Upsilon(\theta) + \frac{d^2\Upsilon(\theta)}{d\theta^2} \cdot \Lambda(r) + \gamma^2 \cdot r^2 \cdot \Lambda(r) \cdot \Upsilon(\theta) = 0,$$

$$\left[r^2 \cdot \frac{d^2\Lambda(r)}{dr^2} + r \cdot \frac{d\Lambda(r)}{dr} + \gamma^2 \cdot r^2 \cdot \Lambda(r)\right] \cdot \Upsilon(\theta) = -\frac{d^2\Upsilon(\theta)}{d\theta^2} \cdot \Lambda(r),$$

$$\frac{1}{\Lambda(r)} \cdot \left[r^2 \cdot \frac{d^2\Lambda(r)}{dr^2} + r \cdot \frac{d\Lambda(r)}{dr} + \gamma^2 \cdot r^2 \cdot \Lambda(r) \right] = m^2$$

$$= -\frac{1}{\Upsilon(\theta)} \cdot \frac{d^2\Upsilon(\theta)}{d\theta^2}.$$

Мы ввели константу m^2 по аналогии с разделением переменных для времени и геометрии. Теперь перепишем в виде системы из двух уравнений: одно — по углу θ, другое — по радиусу r.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Upsilon(\theta)}{d\theta^2} + m^2 \cdot \Upsilon(\theta) = 0, \\ \dfrac{d^2\Lambda(r)}{dr^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d\Lambda(r)}{dr} + \left(\gamma^2 - \dfrac{m^2}{r^2} \right) \cdot \Lambda(r) = 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Решение уравнения для угла θ может быть представлено синусом или косинусом, так как обе эти функции периодичны и удовлетворяют граничному условию $\Upsilon(\theta) = \Upsilon(\theta + 2\pi)$, что накладывает ограничение на m — оно должно быть целым числом. Получается два семейства решений; в дальнейшем возьмём их суперпозицию.

$$\begin{cases} \Upsilon_{1m}(\theta) = C_{1m} \cdot \sin(m \cdot \theta), m \in (1..\infty), \\ \Upsilon_{2m}(\theta) = C_{2m} \cdot \cos(m \cdot \theta), m \in (0..\infty). \end{cases} \tag{2.54}$$

Примем коэффициенты C_{1m} и C_{2m} перед синусом и косинусом равными единице — эти множители всё равно вбираются в коэффициенты разложения. Решение уравнения для радиуса r имеет вид

$$\Lambda_m(r) = A_{1m} \cdot J_m(\gamma \cdot r) + A_{2m} \cdot Y_m(\gamma \cdot r), \tag{2.55}$$

где $J_m(\gamma \cdot r)$ и $Y_m(\gamma \cdot r)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, A_{1m} и A_{2m} — коэффициенты, определяемые из граничных условий, а вес, обеспечивающий ортогональность собственных функций, $\rho(r, \theta) = r$. Причём для того, чтобы функция $\Lambda_m(r)$ была ограниченной при $r \to 0$, необходимо, чтобы $A_{2m} = 0$: функция Бесселя второго рода бесконечна в нуле, что видно на рисунке (B.2).

Таким образом, решения уравнения (2.52) имеют вид

$$\begin{cases} \Psi_{1m}(r, \theta) = \Lambda_m(r) \cdot \Upsilon_{1m}(\theta) = A_{1m} \cdot J_m(\gamma \cdot r) \cdot \sin(m \cdot \theta), m \in (1..\infty), \\ \Psi_{2m}(r, \theta) = \Lambda_m(r) \cdot \Upsilon_{2m}(\theta) = A_{1m} \cdot J_m(\gamma \cdot r) \cdot \cos(m \cdot \theta), m \in (0..\infty). \end{cases} \tag{2.56}$$

Подставим решения (2.56) в граничные условия (2.49) и получим

$$\begin{cases} A_{1m} \cdot J_m(\gamma \cdot R) \cdot \sin(m \cdot \theta) = 0, m \in (1..\infty), \\ A_{1m} \cdot J_m(\gamma \cdot R) \cdot \cos(m \cdot \theta) = 0, m \in (0..\infty). \end{cases}$$

Понятно, что решение имеет смысл только тогда, когда $A_{1m} \neq 0$, что возможно только тогда, когда $J_m(\gamma \cdot R) = 0$. Обозначим корни уравнения $J_m(\mu) = 0$ через μ_{mk} — тогда собственные значения примут вид

$$J_m(\gamma \cdot R) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{R}, \quad k \in (1..\infty). \tag{2.57}$$

Нулевой и отрицательные корни не годятся: при $\mu = 0$ имеем $\gamma = 0$, и для $m \geq 1$ собственная функция $J_m(0 \cdot r) \equiv 0$ — тождественный нуль, не являющийся собственной функцией, а для $m = 0$ нуль вообще не является корнем: $J_0(0) = 1$. Отрицательные корни новых решений не дают: $J_m(-\mu) = (-1)^m \cdot J_m(\mu)$ — собственная функция та же с точностью до знака. Поэтому берём только положительные корни: $\mu_{mk}, k \in (1..\infty)$.

Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_{mk} = \dfrac{\mu_{mk}}{R}, k \in (1..\infty), \\ \Psi_{1mk}(r,\theta) = A_{1mk} \cdot J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \sin(m \cdot \theta), m \in (1..\infty), \\ \Psi_{2mk}(r,\theta) = A_{1mk} \cdot J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \cos(m \cdot \theta), m \in (0..\infty), \end{cases} \tag{2.58}$$

где A_{1mk} — произвольный постоянный множитель: собственная функция определена с точностью до него. Положим $A_{1mk} = 1$ — этот множитель всё равно вбирается в коэффициенты разложения, как и в общем решении.

Для разложения функций в ряд Фурье по $\Psi_{1mk}(r,\theta)$ и $\Psi_{2mk}(r,\theta)$ необходимо вычислить нормы $\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2$ и $\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2$, вес для полярных координат $\rho(r,\theta) = r$.

$$\begin{cases} \|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \int_0^R r \cdot J_m^2(\gamma_{mk} \cdot r)\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2(m \cdot \theta)\, d\theta, m \in (1..\infty), k \in (1..\infty), \\ \|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \int_0^R r \cdot J_m^2(\gamma_{mk} \cdot r)\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2(m \cdot \theta)\, d\theta, m \in (0..\infty), k \in (1..\infty). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin^2(m \cdot \theta)\, d\theta = \pi, m \in (1..\infty), \\ \int_0^{2\pi} \cos^2(m \cdot \theta)\, d\theta = \begin{cases} 2 \cdot \pi, & m = 0, \\ \pi, & m \geq 1 \end{cases}, m \in (0..\infty). \end{cases} \tag{2.59}$$

Сделаем замену $x = \gamma_{mk} \cdot r = \dfrac{\mu_{mk}}{R} \cdot r$.

$$\int_0^R r \cdot J_m^2(\gamma_{mk} \cdot r)\, dr = \int_0^R r \cdot J_m^2\left(\frac{\mu_{mk}}{R} \cdot r\right) dr = \frac{R^2}{\mu_{mk}^2} \cdot \int_0^{\mu_{mk}} x \cdot J_m^2(x)\, dx.$$

Воспользуемся формулой (C.6) для вычисления нормы

$$\int_0^{\mu_{mk}} x \cdot J_m^2(x)\, dx = \frac{\mu_{mk}^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}).$$

В итоге получаем

$$\int_0^R r \cdot J_m^2(\gamma_{mk} \cdot r)\, dr = \frac{R^2}{\mu_{mk}^2} \cdot \frac{\mu_{mk}^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}) = \frac{R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}). \tag{2.60}$$

Нормы для $\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2$ и $\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2$ имеют вид

$$\begin{cases} \|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), \\ \|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \begin{cases} \pi \cdot R^2 \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), & m = 0, \\ \dfrac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), & m \geq 1 \end{cases} \end{cases}. \tag{2.61}$$

Теперь подставим решение (2.56) в граничные условия (2.51) и получим

$$\begin{cases} A_{1m} \cdot \gamma \cdot J'_m(\gamma \cdot R) \cdot \sin(m \cdot \theta) = 0, m \in (1..\infty), \\ A_{1m} \cdot \gamma \cdot J'_m(\gamma \cdot R) \cdot \cos(m \cdot \theta) = 0, m \in (0..\infty). \end{cases}$$

Понятно, что решение имеет смысл только тогда, когда $A_{1m} \neq 0$, что возможно только тогда, когда $J'_m(\gamma \cdot R) = 0$. Обозначим корни уравнения $J'_m(\mu) = 0$ через μ_{mk} — тогда собственные значения примут вид

$$J'_m(\gamma \cdot R) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{R}, \quad k \in (1..\infty). \tag{2.62}$$

Здесь, в отличие от задачи Дирихле, нулевая мода сохраняется: при $m = 0$ нуль является корнем уравнения $J'_0(\mu) = 0$, и ему отвечают $\gamma = 0$ и собственная функция $\Psi(r,\theta) = J_0(0) = 1$ — ненулевая постоянная, то есть полноценная собственная функция (постоянная мода). Будем считать её первым корнем: $\mu_{01} = 0$. Для $m \geq 1$ нулевой корень собственной функции не даёт ($J_m(0 \cdot r) \equiv 0$), поэтому там по-прежнему берутся только положительные корни.

Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_{mk} = \dfrac{\mu_{mk}}{R}, k \in (1..\infty), \quad \mu_{01} = 0, \\ \Psi_{1mk}(r,\theta) = A_{1mk} \cdot J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \sin(m \cdot \theta), m \in (1..\infty), \\ \Psi_{2mk}(r,\theta) = A_{1mk} \cdot J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \cos(m \cdot \theta), m \in (0..\infty), \end{cases} \tag{2.63}$$

где A_{1mk} — произвольный постоянный множитель; положим его, как и прежде, равным единице.

Нормы собственных функций вычислим так же, как в задаче Дирихле: интеграл по углу остаётся тем же (2.59), а вот интеграл по радиусу принимает другое значение — воспользуемся формулой (D.2) для вычисления нормы

$$\int_0^{\mu_{mk}} x \cdot J_m^2(x)\, dx = \left(\mu_{mk}^2 - m^2\right) \cdot \frac{J_m^2(\mu_{mk})}{2}.$$

В итоге получаем

$$\int_0^R r \cdot J_m^2(\gamma_{mk} \cdot r)\, dr = \frac{R^2}{\mu_{mk}^2} \cdot \left(\mu_{mk}^2 - m^2\right) \cdot \frac{J_m^2(\mu_{mk})}{2} = R^2 \cdot \left(\mu_{mk}^2 - m^2\right) \cdot \frac{J_m^2(\mu_{mk})}{2 \cdot \mu_{mk}^2}. \tag{2.64}$$

Особый случай $\mu_{01} = 0$ (при $\gamma_{01} = 0$ собственная функция $\Psi_{201}(r,\theta) = 1$) вычислим отдельно

$$\|\Psi_{201}(r,\theta)\|^2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 \cdot r\, dr\, d\theta = \pi \cdot R^2. \tag{2.65}$$

Нормы для $\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2$ и $\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2$ имеют вид

$$\begin{cases} \|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot (\mu_{mk}^2 - m^2) \cdot J_m^2(\mu_{mk})}{2 \cdot \mu_{mk}^2}, \\ \|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \begin{cases} \pi \cdot R^2 \cdot J_m^2(\mu_{mk}), & m = 0, \\ \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot (\mu_{mk}^2 - m^2) \cdot J_m^2(\mu_{mk})}{2 \cdot \mu_{mk}^2}, & m \geq 1 \end{cases}. \end{cases} \tag{2.66}$$

Финальное решение двумерной краевой задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями примет вид

$$\begin{gathered}
U(\theta,t) = \Phi(\theta,t), \\
\widehat{T}(r,\theta,0) = T_0(r,\theta) - U(\theta,0), \\
\widehat{f}(r,\theta,t) = f(r,\theta,t) - \frac{\partial\Phi(\theta,t)}{\partial t} + \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi(\theta,t)}{\partial\theta^2}, \\
\gamma_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{R}, \quad J_m(\mu_{mk}) = 0, \quad m \in (0..\infty), \quad k \in (1..\infty), \\
\Psi_{1mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \sin(m \cdot \theta), \quad m \in (1..\infty), \quad k \in (1..\infty), \\
\Psi_{2mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \cos(m \cdot \theta), \quad m \in (0..\infty), \quad k \in (1..\infty), \\
\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), \\
\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \begin{cases} \pi \cdot R^2 \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), & m = 0, \\ \dfrac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), & m \geq 1 \end{cases}, \\
T_{01mk} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{T}(r,\theta,0) \cdot \Psi_{1mk}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta, \\
T_{02mk} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{T}(r,\theta,0) \cdot \Psi_{2mk}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta, \\
f_{1mk}(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,\theta,t) \cdot \Psi_{1mk}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta, \\
f_{2mk}(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,\theta,t) \cdot \Psi_{2mk}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta, \\
\widehat{T}(r,\theta,t) = \\
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{1mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2} \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_{mk}^2 \cdot t} \cdot \left[T_{01mk} + \int_0^t e^{a^2 \cdot \gamma_{mk}^2 \cdot \tau} \cdot f_{1mk}(\tau) \, d\tau \right] + \\
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{2mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2} \cdot e^{-a^2 \cdot \gamma_{mk}^2 \cdot t} \cdot \left[T_{02mk} + \int_0^t e^{a^2 \cdot \gamma_{mk}^2 \cdot \tau} \cdot f_{2mk}(\tau) \, d\tau \right], \\
T(r,\theta,t) = U(\theta,t) + \widehat{T}(r,\theta,t).
\end{gathered} \tag{2.67}$$

В задаче Неймана, в отличие от Дирихле, спектр содержит нулевую моду ($\gamma_{01} = 0$, $\Psi_{201}(r,\theta) = 1$) — случай $\gamma = 0$, который в общем решении (2.18) был оставлен для отдельного рассмотрения; именно она даёт незатухающее слагаемое — член с $m =$

$0, k = 1$ во второй сумме. Финальное решение двумерной краевой задачи Неймана с неоднородными граничными условиями примет вид

$$
\begin{aligned}
&U(r,\theta,t) = \Phi(\theta,t)\cdot r,\\
&\widehat{T}(r,\theta,0) = T_0(r,\theta) - U(r,\theta,0),\\
&\widehat{f}(r,\theta,t) = f(r,\theta,t) - r\cdot\frac{\partial\Phi(\theta,t)}{\partial t} + \frac{a^2\cdot\Phi(\theta,t)}{r} + \frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\theta,t)}{\partial\theta^2},\\
&\gamma_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{R},\quad J'_m(\mu_{mk}) = 0,\quad \mu_{01} = 0,\quad m\in(0..\infty),\quad k\in(1..\infty),\\
&\Psi_{1mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk}\cdot r)\cdot\sin(m\cdot\theta),\quad m\in(1..\infty),\quad k\in(1..\infty),\\
&\Psi_{2mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk}\cdot r)\cdot\cos(m\cdot\theta),\quad m\in(0..\infty),\quad k\in(1..\infty),\\
&\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2\cdot(\mu_{mk}^2 - m^2)\cdot J_m^2(\mu_{mk})}{2\cdot\mu_{mk}^2},\\
&\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \begin{cases}\pi\cdot R^2\cdot J_m^2(\mu_{mk}), & m = 0,\\ \dfrac{\pi\cdot R^2\cdot(\mu_{mk}^2 - m^2)\cdot J_m^2(\mu_{mk})}{2\cdot\mu_{mk}^2}, & m\geq 1\end{cases},\\
&T_{01mk} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\widehat{T}(r,\theta,0)\cdot\Psi_{1mk}(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta,\\
&T_{02mk} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\widehat{T}(r,\theta,0)\cdot\Psi_{2mk}(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta,\\
&f_{1mk}(t) = \int_0^R\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,t)\cdot\Psi_{1mk}(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta,\\
&f_{2mk}(t) = \int_0^R\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,t)\cdot\Psi_{2mk}(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta,\\
&\widehat{T}(r,\theta,t) =\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_{1mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot t}\cdot\left[T_{01mk} + \int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot\tau}\cdot f_{1mk}(\tau)\,d\tau\right] +\\
&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot t}\cdot\left[T_{02mk} + \int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot\tau}\cdot f_{2mk}(\tau)\,d\tau\right],\\
&T(r,\theta,t) = U(r,\theta,t) + \widehat{T}(r,\theta,t).
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Чтобы получить стационарные решения, устремим в найденных решениях время к бесконечности ($t\to\infty$), как это сделано для общего случая в (2.18). Слагаемое с начальным условием занулится, поскольку $e^{-a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot t}\to 0$; источники и граничные условия перестают зависеть от времени, а интеграл по времени для $\gamma_{mk}\neq 0$ даёт множитель $\frac{1}{a^2\cdot\gamma_{mk}^2}$:

$$
\int_0^t e^{-a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot(t-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{a^2\cdot\gamma_{mk}^2}\cdot(1 - e^{-a^2\cdot\gamma_{mk}^2\cdot t})
$$

$$\to \frac{1}{a^2 \cdot \gamma_{mk}^2} \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \gamma_{mk} \neq 0.$$

Стационарное решение двумерной краевой задачи Дирихле примет вид

$$\begin{aligned}
&U(\theta) = \Phi(\theta),\\
&\widehat{f}(r,\theta) = f(r,\theta) + \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{d^2\Phi(\theta)}{d\theta^2},\\
&\gamma_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{R}, \quad J_m(\mu_{mk}) = 0, \quad m \in (0..\infty), \quad k \in (1..\infty),\\
&\Psi_{1mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \sin(m \cdot \theta), \quad m \in (1..\infty),\\
&\Psi_{2mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk} \cdot r) \cdot \cos(m \cdot \theta), \quad m \in (0..\infty),\\
&\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}),\\
&\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \pi \cdot R^2 \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), \quad m = 0,\\
&\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu_{mk}), \quad m \geq 1,\\
&f_{1mk} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,\theta) \cdot \Psi_{1mk}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta,\\
&f_{2mk} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,\theta) \cdot \Psi_{2mk}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta,\\
&T(r,\theta) = U(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{1mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2} \cdot \frac{f_{1mk}}{a^2 \cdot \gamma_{mk}^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_{2mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2} \cdot \frac{f_{2mk}}{a^2 \cdot \gamma_{mk}^2}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Стационарное решение двумерной краевой задачи Неймана не такое простое. В отличие от задачи Дирихле, чисто неймановская стационарная задача разрешима не всегда. Приведённая функция $\widehat{T}(r,\theta)$ удовлетворяет однородным условиям Неймана и стационарному уравнению $a^2 \cdot \Delta\widehat{T}(r,\theta) + \widehat{f}(r,\theta) = 0$. Проинтегрируем его по области:

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cdot \Delta\widehat{T} + \widehat{f}\right) r \, dr \, d\theta = a^2 \oint_{r=R} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \mathbf{n}} \, dl \\
+ \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f} \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta.
\end{aligned}$$

Граничный интеграл обратился в нуль в силу однородных условий Неймана, и осталось условие разрешимости (2.22): $\int_0^R \int_0^{2\pi} \widehat{f}(r,\theta) \cdot r \, dr \, d\theta = 0$ — суммарный приведённый источник по области должен обращаться в нуль (иначе тепло накапливается и стационара нет). При его выполнении решение определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной C: ей отвечает нулевая мода ($\gamma_{01} = 0$, $\Psi_{201}(r,\theta) = 1$), амплитуда которой стационарным уравнением не фиксируется. С этой оговоркой решение примет вид

$$
\begin{aligned}
&U(r,\theta) = \Phi(\theta)\cdot r,\\
&\widehat{f}(r,\theta) = f(r,\theta) + \frac{a^2\cdot\Phi(\theta)}{r} + \frac{a^2}{r}\cdot\frac{d^2\Phi(\theta)}{d\theta^2},\\
&\gamma_{mk} = \frac{\mu_{mk}}{R},\quad J'_m(\mu_{mk}) = 0,\quad \mu_{mk} > 0,\quad m\in(0..\infty),\quad k\in(1..\infty),\\
&\Psi_{1mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk}\cdot r)\cdot\sin(m\cdot\theta),\quad m\in(1..\infty),\\
&\Psi_{2mk}(r,\theta) = J_m(\gamma_{mk}\cdot r)\cdot\cos(m\cdot\theta),\quad m\in(0..\infty),\\
&\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2\cdot(\mu_{mk}^2 - m^2)\cdot J_m^2(\mu_{mk})}{2\cdot\mu_{mk}^2},\\
&\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \pi\cdot R^2\cdot J_m^2(\mu_{mk}),\quad m = 0,\\
&\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2\cdot(\mu_{mk}^2 - m^2)\cdot J_m^2(\mu_{mk})}{2\cdot\mu_{mk}^2},\quad m\geq 1,\\
&f_{1mk} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta)\cdot\Psi_{1mk}(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta,\\
&f_{2mk} = \int_0^R\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta)\cdot\Psi_{2mk}(r,\theta)\cdot r\,dr\,d\theta,\\
&T(r,\theta) = U(r,\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_{1mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{1mk}(r,\theta)\|^2}\cdot\frac{f_{1mk}}{a^2\cdot\gamma_{mk}^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2mk}(r,\theta)}{\|\Psi_{2mk}(r,\theta)\|^2}\cdot\frac{f_{2mk}}{a^2\cdot\gamma_{mk}^2} + C,\quad C = \text{const}.
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Трёхмерная краевая задача теплопроводности

Рассмотрим трёхмерную несимметричную задачу теплопроводности в шаре радиуса R. Уравнение теплопроводности (1.8) в сферических координатах принимает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T(r,\theta,\phi,t)}{\partial t} = a^2\cdot\frac{\partial^2 T(r,\theta,\phi,t)}{\partial r^2} + \frac{2\cdot a^2}{r}\cdot\frac{\partial T(r,\theta,\phi,t)}{\partial r}\\
+ \frac{a^2}{r^2\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial T(r,\theta,\phi,t)}{\partial\theta}\right)\\
+ \frac{a^2}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 T(r,\theta,\phi,t)}{\partial\phi^2} + f(r,\theta,\phi,t),
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

где $r\in(0,R)$, $\theta\in(0,\pi)$, $\phi\in(0,2\pi)$, R — радиус, $T(r,\theta,\phi,t)$ — температура, a^2 — коэффициент температуропроводности, $f(r,\theta,\phi,t)$ — функция плотности тепловых источников.

Краевые условия Дирихле (1.13) в трёхмерном случае имеют вид

$$
\begin{cases}
T(r,\theta,\phi,0) = T_0(r,\theta,\phi),\\
T(R,\theta,\phi,t) = \Phi(\theta,\phi,t),\\
|T(r,0,\phi,t)| < \infty,\quad |T(r,\pi,\phi,t)| < \infty,\\
T(r,\theta,\phi,t) = T(r,\theta,\phi+2\pi,t),
\end{cases}
\tag{2.72}
$$

где $T_0(r,\theta,\phi)$ — начальное условие, $\Phi(\theta,\phi,t)$ — граничное условие, которое, разумеется, периодично по ϕ; на полюсах ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) вместо граничных условий ставится условие ограниченности решения.

Для избавления от неоднородности введём $T(r,\theta,\phi,t) = \widehat{T}(r,\theta,\phi,t) + U(\theta,\phi,t)$, выберем функцию $U(\theta,\phi,t) = \Phi(\theta,\phi,t)$, в соответствии с (2.2). Тогда уравнение (2.71) и краевые условия (2.72) примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial r^2} + \frac{2\cdot a^2}{r} \cdot \frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial r} + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial \theta}\right) + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial \phi^2} + \widehat{f}(r,\theta,\phi,t), \\ \widehat{T}(r,\theta,\phi,0) = T_0(r,\theta,\phi) - U(\theta,\phi,0), \\ \widehat{T}(R,\theta,\phi,t) = 0, \\ |\widehat{T}(r,0,\phi,t)| < \infty, \quad |\widehat{T}(r,\pi,\phi,t)| < \infty, \\ \widehat{T}(r,\theta,\phi,t) = \widehat{T}(r,\theta,\phi+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.73}$$

где

$$\widehat{f}(r,\theta,\phi,t) = f(r,\theta,\phi,t) - \frac{\partial U(\theta,\phi,t)}{\partial t} + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial U(\theta,\phi,t)}{\partial \theta}\right) + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 U(\theta,\phi,t)}{\partial \phi^2}.$$

Краевые условия Неймана (1.14) в трёхмерном случае имеют вид

$$\begin{cases} T(r,\theta,\phi,0) = T_0(r,\theta,\phi), \\ \left.\dfrac{\partial T(r,\theta,\phi,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R} = \Phi(\theta,\phi,t), \\ |T(r,0,\phi,t)| < \infty, \quad |T(r,\pi,\phi,t)| < \infty, \\ T(r,\theta,\phi,t) = T(r,\theta,\phi+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.74}$$

где $\left.\dfrac{\partial T(r,\theta,\phi,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R}$ — нормальная производная температуры на сфере радиуса R; направление нормали совпадает с направлением координаты r.

Для избавления от неоднородности введём $T(r,\theta,\phi,t) = \widehat{T}(r,\theta,\phi,t) + U(r,\theta,\phi,t)$, выберем функцию $U(r,\theta,\phi,t) = \Phi(\theta,\phi,t) \cdot r$ — она удовлетворяет условию (2.3): $\left.\dfrac{\partial U(r,\theta,\phi,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R} = \Phi(\theta,\phi,t)$. Тогда уравнение (2.71) и краевые условия (2.74) примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial r^2} + \frac{2\cdot a^2}{r} \cdot \frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial r} + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial \theta}\right) + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial \phi^2} + \widehat{f}(r,\theta,\phi,t), \\ \widehat{T}(r,\theta,\phi,0) = T_0(r,\theta,\phi) - U(r,\theta,\phi,0), \\ \left.\frac{\partial \widehat{T}(r,\theta,\phi,t)}{\partial \mathbf{n}}\right|_{r=R} = 0, \\ |\widehat{T}(r,0,\phi,t)| < \infty, \quad |\widehat{T}(r,\pi,\phi,t)| < \infty, \\ \widehat{T}(r,\theta,\phi,t) = \widehat{T}(r,\theta,\phi+2\pi,t), \end{cases} \tag{2.75}$$

где

$$\widehat{f}(r,\theta,\phi,t) = f(r,\theta,\phi,t) - \frac{\partial U(r,\theta,\phi,t)}{\partial t} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 U(r,\theta,\phi,t)}{\partial r^2} + \frac{2\cdot a^2}{r} \cdot \frac{\partial U(r,\theta,\phi,t)}{\partial r} + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial U(r,\theta,\phi,t)}{\partial \theta}\right) + \frac{a^2}{r^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 U(r,\theta,\phi,t)}{\partial \phi^2}.$$

Уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial^2\Psi(r,\theta,\phi)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\Psi(r,\theta,\phi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Psi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Psi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\gamma^2\cdot\Psi(r,\theta,\phi)=0. \quad (2.76)$$

Представим функцию $\Psi(r,\theta,\phi)$ в виде произведения трёх функций $\Psi(r,\theta,\phi)=R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)$, подставим в уравнение (2.76) и проведём преобразования

$$\frac{\partial^2(R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial(R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial(R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2(R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\phi^2}+\gamma^2\cdot R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)=0,$$

$$\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)\cdot\left[\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{R(r)}{r^2}\cdot\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial(\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2(\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\phi^2}\right]+\gamma^2\cdot R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)=0,$$

$$\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)\cdot\left[r^2\cdot\frac{d^2R(r)}{dr^2}+2\cdot r\cdot\frac{dR(r)}{dr}+r^2\cdot\gamma^2\cdot R(r)\right]+R(r)\cdot\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial(\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2(\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\phi^2}\right]=0,$$

Выражение в первой скобке зависит только от r, во второй — только от углов, поэтому, поделив на $R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)$, обе части можно приравнять константе γ_1^2 — по аналогии с разделением переменных для времени и геометрии. Уравнение для радиуса примет вид

$$r^2\cdot\frac{d^2R(r)}{dr^2}+2\cdot r\cdot\frac{dR(r)}{dr}+\left(r^2\cdot\gamma^2-\gamma_1^2\right)\cdot R(r)=0, \quad (2.77)$$

и продолжим преобразования

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial(\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2(\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi))}{\partial\phi^2}+\gamma_1^2\cdot\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)=0,$$

$$\Upsilon(\phi)\cdot\left[\frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+\gamma_1^2\cdot\Theta(\theta)\right]+\Theta(\theta)\cdot\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2(\Upsilon(\phi))}{\partial\phi^2}=0.$$

Здесь выражение в скобках зависит только от θ, а последнее слагаемое — только от ϕ, поэтому, домножив на $\frac{\sin^2(\theta)}{\Theta(\theta)\cdot\Upsilon(\phi)}$, снова разделим переменные константой m^2 и получим уравнения для полярного и азимутального углов

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\left[\gamma_1^2-\frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right]\cdot\Theta(\theta) = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{d^2\Upsilon(\phi)}{d\phi^2}+m^2\cdot\Upsilon(\phi)=0. \quad (2.79)$$

Решение уравнения (2.79) мы уже находили для двумерного случая, поэтому сошлёмся на (2.54). А для решения уравнения (2.78) введём замену $z=\cos(\theta)$: при $\theta\in(0,\pi)$ имеем $z\in(-1,1)$ и $dz=-\sin(\theta)\cdot d\theta$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\cdot\frac{d\Theta(z)}{dz}\right)+\left[\gamma_1^2-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\cdot\Theta(z)=0, \quad -1<z<1. \quad (2.80)$$

Это уравнение разобрано в приложении «Уравнение Лежандра», его решение имеет вид (E.6)

$$\Theta_{km}(z)=P_k^{(m)}(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m}{dz^m}P_k(z),$$

где $\gamma_{1k}^2=k\cdot(k+1)$ — собственные значения, $P_k^{(m)}(z)$ — присоединённые полиномы Лежандра, причём нетривиальные решения существуют только при $m\le k$. Норма присоединённого полинома Лежандра имеет вид (F.6). Теперь вернёмся к углу θ, сделав обратную подстановку

$$\Theta_{km}(\theta)=\sin^m(\theta)\cdot\frac{d^m}{d(\cos(\theta))^m}P_k(\cos(\theta)). \quad (2.81)$$

Вообще говоря, это решение определено с точностью до постоянного множителя — положим его равным единице: он всё равно вбирается в коэффициенты разложения. Теперь вернёмся к уравнению (2.77) и перепишем его с учётом $\gamma_1^2=k\cdot(k+1)$

$$r^2\cdot\frac{d^2R(r)}{dr^2}+2\cdot r\cdot\frac{dR(r)}{dr}+\left(r^2\cdot\gamma^2-k\cdot(k+1)\right)\cdot R(r)=0.$$

Это уравнение разобрано в приложении «Уравнение Бесселя в сферических координатах»: подстановка $R(r)=\frac{\widehat{R}(r)}{\sqrt{r}}$ сводит его к уравнению Бесселя с полуцелым индексом, и решение имеет вид (G.2). Следует заметить, что решение ограничено в точке $r=0$: функция Бесселя $J_{k+1/2}(\gamma\cdot r)$ стремится к нулю не медленнее, чем $\sqrt{r}$.

Таким образом, решения уравнения (2.76) имеют вид

$$\begin{cases} \Psi_{1km}(r,\theta,\phi) = A_{km} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot r) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m \cdot \phi), \\ 1 \le m \le k, \quad k \ge 1, \\ \Psi_{2km}(r,\theta,\phi) = A_{km} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot r) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m \cdot \phi), \\ 0 \le m \le k, \quad k \ge 0, \end{cases} \tag{2.82}$$

Подставим решения (2.82) в граничные условия (2.73) и получим

$$\begin{cases} A_{km} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{R}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot R) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m \cdot \phi) = 0, \quad 1 \le m \le k, \quad k \ge 1, \\ A_{km} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{R}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot R) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m \cdot \phi) = 0, \quad 0 \le m \le k, \quad k \ge 0. \end{cases}$$

Понятно, что решение имеет смысл только тогда, когда $A_{km} \neq 0$, что возможно только тогда, когда $J_{k+1/2}(\gamma \cdot R) = 0$. Обозначим корни уравнения $J_{k+1/2}(\mu) = 0$ через μ_{ks} — тогда собственные значения примут вид

$$J_{k+1/2}(\gamma \cdot R) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma_{ks} = \frac{\mu_{ks}}{R}, \quad s \in (1..\infty). \tag{2.83}$$

Нулевой и отрицательные корни не годятся: при $\mu = 0$ собственная функция $J_{k+1/2}(0 \cdot r) \equiv 0$ — тождественный нуль, не являющийся собственной функцией (индекс $k + 1/2 > 0$), а отрицательные корни новых решений не дают. Поэтому берём только положительные корни: $\mu_{ks}, s \in (1..\infty)$.

Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_{ks} = \dfrac{\mu_{ks}}{R}, \quad s \in (1..\infty), \\ \Psi_{1kms}(r,\theta,\phi) = A_{kms} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks} \cdot r) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m \cdot \phi), \\ 1 \le m \le k, \quad k \ge 1, \\ \Psi_{2kms}(r,\theta,\phi) = A_{kms} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks} \cdot r) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m \cdot \phi), \\ 0 \le m \le k, \quad k \ge 0, \end{cases} \tag{2.84}$$

где A_{kms} — произвольный постоянный множитель: собственная функция определена с точностью до него. Положим $A_{kms} = 1$ — этот множитель всё равно вбирается в коэффициенты разложения, как и в общем решении.

Для разложения функций в ряд Фурье по $\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)$ и $\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)$ необходимо вычислить нормы $\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2$ и $\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2$, вес для сферических координат $\rho(r,\theta,\phi) = r^2 \cdot \sin(\theta)$.

$$\|\Psi_{1kms}\|^2 = \int_0^R r \cdot J_{k+1/2}^2(\gamma_{ks} \cdot r)\, dr \int_0^\pi \left[P_k^{(m)}(\cos\theta)\right]^2 \sin(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(m\phi)\, d\phi, \quad 1 \le m \le k, \quad k \ge 1, \quad s \ge 1,$$

$$\|\Psi_{2kms}\|^2 = \int_0^R r \cdot J_{k+1/2}^2(\gamma_{ks} \cdot r)\, dr \int_0^\pi \left[P_k^{(m)}(\cos\theta)\right]^2 \sin(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(m\phi)\, d\phi, \quad 0 \le m \le k, \quad k \ge 0, \quad s \ge 1.$$

Интеграл по азимутальному углу ϕ вычислен в (2.59), интеграл по радиусу — тот же, что и в задаче Дирихле для круга: после замены $x = \gamma_{ks} \cdot r$ он берётся по формуле (C.6), а интеграл по углу θ после замены $z = \cos(\theta)$ — это в точности норма присоединённого полинома Лежандра (F.6). Соберём всё вместе

$$\begin{cases} \|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot k + 1} \cdot \dfrac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot J^2_{k+3/2}(\mu_{ks}), \\ \|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot k + 1} \cdot \dfrac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot J^2_{k+3/2}(\mu_{ks}), & m = 0, \\ \dfrac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot k + 1} \cdot \dfrac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot J^2_{k+3/2}(\mu_{ks}), & m \geq 1 \end{cases} \end{cases}. \tag{2.85}$$

Теперь подставим решение (2.82) в граничные условия (2.75); поскольку направление нормали совпадает с направлением координаты r, получим

$$\begin{cases} A_{km} \cdot \left[-\dfrac{1}{2 \cdot R \cdot \sqrt{R}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot R) + \dfrac{\gamma}{\sqrt{R}} \cdot J'_{k+1/2}(\gamma \cdot R) \right] \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m \cdot \phi) = 0, \\ 1 \leq m \leq k, \quad k \geq 1, \\ A_{km} \cdot \left[-\dfrac{1}{2 \cdot R \cdot \sqrt{R}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot R) + \dfrac{\gamma}{\sqrt{R}} \cdot J'_{k+1/2}(\gamma \cdot R) \right] \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m \cdot \phi) = 0, \\ 0 \leq m \leq k, \quad k \geq 0, \end{cases}$$

Понятно, что решение имеет смысл только тогда, когда $A_{km} \neq 0$, что возможно только тогда, когда $\gamma \cdot J'_{k+1/2}(\gamma \cdot R) = \dfrac{1}{2 \cdot R} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot R)$. Обозначим корни уравнения $J'_{k+1/2}(\mu) = \dfrac{1}{2 \cdot \mu} \cdot J_{k+1/2}(\mu)$ через μ_{ks} — тогда собственные значения примут вид

$$J'_{k+1/2}(\mu_{ks}) = \frac{1}{2 \cdot \mu_{ks}} \cdot J_{k+1/2}(\mu_{ks}) \;\Rightarrow\; \gamma_{ks} = \frac{\mu_{ks}}{R}, \quad s \in (1..\infty). \tag{2.86}$$

Здесь, в отличие от задачи Дирихле, нулевая мода сохраняется: при $k = 0$ радиальное решение — сферическая функция Бесселя $j_0(\gamma \cdot r) = \dfrac{\sin(\gamma \cdot r)}{\gamma \cdot r}$, и нуль является корнем условия Неймана ($j'_0(0) = 0$); ему отвечают $\gamma = 0$ и собственная функция $\Psi(r,\theta,\phi) = 1$ — ненулевая постоянная, то есть полноценная собственная функция (постоянная мода). Будем считать её первым корнем: $\mu_{01} = 0$. Для $k \geq 1$ нулевой корень собственной функции не даёт ($j_k(0) = 0$), поэтому там по-прежнему берутся только положительные корни.

Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_{ks} = \dfrac{\mu_{ks}}{R}, \quad s \in (1..\infty), \quad \mu_{01} = 0, \\ \Psi_{1kms}(r,\theta,\phi) = A_{kms} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks} \cdot r) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \sin(m \cdot \phi), \\ 1 \leq m \leq k, \quad k \geq 1, \\ \Psi_{2kms}(r,\theta,\phi) = A_{kms} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks} \cdot r) \cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta)) \cdot \cos(m \cdot \phi), \\ 0 \leq m \leq k, \quad k \geq 0, \end{cases} \tag{2.87}$$

где A_{kms} — произвольный постоянный множитель; положим его, как и прежде, равным единице.

Нормы собственных функций вычислим так же, как в задаче Дирихле: интегралы по углам остаются теми же, а вот интеграл по радиусу принимает другое значение — воспользуемся формулой (H.2) для вычисления нормы

$$\int_0^R r \cdot J_{k+1/2}^2(\gamma_{ks} \cdot r)\, dr = \frac{R^2}{2} \cdot \left[1 - \frac{k \cdot (k+1)}{\mu_{ks}^2}\right] \cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}).$$

Особый случай $\mu_{01} = 0$ (при $\gamma_{01} = 0$ собственная функция $\Psi_{2001}(r, \theta, \phi) = 1$) вычислим отдельно

$$\|\Psi_{2001}(r, \theta, \phi)\|^2 = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot r^2 \cdot \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}. \quad (2.88)$$

Нормы для $\|\Psi_{1kms}(r, \theta, \phi)\|^2$ и $\|\Psi_{2kms}(r, \theta, \phi)\|^2$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{1kms}(r, \theta, \phi)\|^2 &= \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot k + 1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot \left[1 - \frac{k \cdot (k+1)}{\mu_{ks}^2}\right] \cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}), \\
\|\Psi_{2kms}(r, \theta, \phi)\|^2 &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot k + 1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot \left[1 - \frac{k \cdot (k+1)}{\mu_{ks}^2}\right] \cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}), \quad m = 0, \\
\|\Psi_{2kms}(r, \theta, \phi)\|^2 &= \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot k + 1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!} \cdot \left[1 - \frac{k \cdot (k+1)}{\mu_{ks}^2}\right] \cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}), \quad m \geq 1.
\end{aligned} \quad (2.89)$$

Финальное решение трёхмерной краевой задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями примет вид

$$
\begin{aligned}
&U(\theta,\phi,t)=\Phi(\theta,\phi,t),\\
&\widehat{T}(r,\theta,\phi,0)=T_0(r,\theta,\phi)-U(\theta,\phi,0),\\
&\widehat{f}(r,\theta,\phi,t)=f(r,\theta,\phi,t)-\frac{\partial\Phi(\theta,\phi,t)}{\partial t}+\frac{a^2}{r^2\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Phi(\theta,\phi,t)}{\partial\theta}\right)+\\
&\frac{a^2}{r^2\cdot\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\theta,\phi,t)}{\partial\phi^2},\\
&\gamma_{ks}=\frac{\mu_{ks}}{R},\quad J_{k+1/2}(\mu_{ks})=0,\quad k\in(0..\infty),\quad s\in(1..\infty),\\
&\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\sin(m\cdot\phi),\quad 1\le m\le k,\\
&\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\cos(m\cdot\phi),\quad 0\le m\le k,\\
&\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2=\frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot J_{k+3/2}^2(\mu_{ks}),\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2=\frac{2\cdot\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot J_{k+3/2}^2(\mu_{ks}),\quad m=0,\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2=\frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot J_{k+3/2}^2(\mu_{ks}),\quad m\ge 1,\qquad (2.90)\\
&T_{01kms}=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{T}(r,\theta,\phi,0)\cdot\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&T_{02kms}=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{T}(r,\theta,\phi,0)\cdot\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&f_{1kms}(t)=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi,t)\cdot\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&f_{2kms}(t)=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi,t)\cdot\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&\widehat{T}(r,\theta,\phi,t)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot t}\cdot\left[T_{01kms}+\int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot\tau}\cdot f_{1kms}(\tau)\,d\tau\right]+\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot t}\cdot\left[T_{02kms}+\int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot\tau}\cdot f_{2kms}(\tau)\,d\tau\right],\\
&T(r,\theta,\phi,t)=U(\theta,\phi,t)+\widehat{T}(r,\theta,\phi,t).
\end{aligned}
$$

В задаче Неймана, в отличие от Дирихле, спектр содержит нулевую моду ($\gamma_{01}=0$, $\Psi_{2001}(r,\theta,\phi)=1$) — случай $\gamma=0$, который в общем решении (2.18) был оставлен для отдельного рассмотрения; именно она даёт незатухающее слагаемое — член с $k=0, m=0, s=1$ во второй сумме. Финальное решение трёхмерной краевой задачи Неймана с неоднородными граничными условиями примет вид

$$
\begin{aligned}
&U(r,\theta,\phi,t) = \Phi(\theta,\phi,t)\cdot r,\\
&\widehat{T}(r,\theta,\phi,0) = T_0(r,\theta,\phi) - U(r,\theta,\phi,0),\\
&\widehat{f}(r,\theta,\phi,t) = f(r,\theta,\phi,t) - r\cdot\frac{\partial\Phi(\theta,\phi,t)}{\partial t} + \frac{2\cdot a^2\cdot\Phi(\theta,\phi,t)}{r} +\\
&\frac{a^2}{r\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Phi(\theta,\phi,t)}{\partial\theta}\right) +\\
&\frac{a^2}{r\cdot\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\theta,\phi,t)}{\partial\phi^2},\\
&\gamma_{ks} = \frac{\mu_{ks}}{R},\quad J'_{k+1/2}(\mu_{ks}) = \frac{1}{2\cdot\mu_{ks}}\cdot J_{k+1/2}(\mu_{ks}),\quad \mu_{01} = 0,\\
&k\in(0..\infty),\quad s\in(1..\infty),\\
&\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\sin(m\cdot\phi),\quad 1\le m\le k,\\
&\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\cos(m\cdot\phi),\quad 0\le m\le k,\\
&\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\left[1-\frac{k\cdot(k+1)}{\mu_{ks}^2}\right]\cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}),\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{2\cdot\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\left[1-\frac{k\cdot(k+1)}{\mu_{ks}^2}\right]\cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}),\quad m=0,\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\left[1-\frac{k\cdot(k+1)}{\mu_{ks}^2}\right]\cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}),\quad m\ge 1,\\
&\|\Psi_{2001}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{4\cdot\pi\cdot R^3}{3},\\
&T_{01kms} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{T}(r,\theta,\phi,0)\cdot\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&T_{02kms} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{T}(r,\theta,\phi,0)\cdot\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&f_{1kms}(t) = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi,t)\cdot\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&f_{2kms}(t) = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi,t)\cdot\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&\widehat{T}(r,\theta,\phi,t) =\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot t}\cdot\left[T_{01kms}+\int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot\tau}\cdot f_{1kms}(\tau)\,d\tau\right] +\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot t}\cdot\left[T_{02kms}+\int_0^t e^{a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot\tau}\cdot f_{2kms}(\tau)\,d\tau\right],\\
&T(r,\theta,\phi,t) = U(r,\theta,\phi,t) + \widehat{T}(r,\theta,\phi,t).
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

Чтобы получить стационарные решения, устремим в найденных решениях время к бесконечности ($t\to\infty$), как это сделано для общего случая в (2.18). Слагаемое с начальным условием занулится, поскольку $e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot t}\to 0$; источники и граничные условия перестают зависеть от времени, а интеграл по времени для $\gamma_{ks}\neq 0$ даёт множитель $\frac{1}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2}$:

$$\int_0^t e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot(t-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2}\cdot(1-e^{-a^2\cdot\gamma_{ks}^2\cdot t})$$

$$\to \frac{1}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2} \quad \text{при} \quad t\to\infty, \quad \gamma_{ks}\neq 0.$$

Стационарное решение трёхмерной краевой задачи Дирихле примет вид

$$\begin{aligned}
&U(\theta,\phi) = \Phi(\theta,\phi),\\
&\widehat{f}(r,\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi) + \frac{a^2}{r^2\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Phi(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{a^2}{r^2\cdot\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\theta,\phi)}{\partial\phi^2},\\
&\gamma_{ks} = \frac{\mu_{ks}}{R}, \quad J_{k+1/2}(\mu_{ks}) = 0, \quad k\in(0..\infty), \quad s\in(1..\infty),\\
&\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\sin(m\cdot\phi), \quad 1\le m\le k,\\
&\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\cos(m\cdot\phi), \quad 0\le m\le k,\\
&\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot J_{k+3/2}^2(\mu_{ks}),\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{2\cdot\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot J_{k+3/2}^2(\mu_{ks}), \quad m=0,\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot J_{k+3/2}^2(\mu_{ks}), \quad m\ge 1,\\
&f_{1kms} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi)\cdot\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&f_{2kms} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi)\cdot\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&T(r,\theta,\phi) = U(\theta,\phi) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot\frac{f_{1kms}}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2} +\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot\frac{f_{2kms}}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2}.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Стационарное решение трёхмерной краевой задачи Неймана не такое простое. В отличие от задачи Дирихле, чисто неймановская стационарная задача разрешима не всегда. Приведённая функция $\widehat{T}(r,\theta,\phi)$ удовлетворяет однородным условиям Неймана и стационарному уравнению $a^2\cdot\Delta\widehat{T}(r,\theta,\phi)+\widehat{f}(r,\theta,\phi)=0$. Проинтегрируем его по области:

$$0 = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(a^2\cdot\Delta\widehat{T}+\widehat{f}\right)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi =$$

$$a^2\cdot\oint_{r=R}\frac{\partial\widehat{T}}{\partial\mathbf{n}}\,dS + \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

Граничный интеграл обратился в нуль в силу однородных условий Неймана, и осталось условие разрешимости (2.22): $\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi = 0$ —

суммарный приведённый источник по области должен обращаться в нуль (иначе тепло накапливается и стационара нет). При его выполнении решение определяется лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной C: ей отвечает нулевая мода ($\gamma_{01} = 0$, $\Psi_{2001}(r,\theta,\phi) = 1$), амплитуда которой стационарным уравнением не фиксируется. С этой оговоркой решение примет вид

$$
\begin{aligned}
&U(r,\theta,\phi) = \Phi(\theta,\phi)\cdot r,\\
&\widehat{f}(r,\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi) + \frac{2\cdot a^2\cdot\Phi(\theta,\phi)}{r} +\\
&\frac{a^2}{r\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Phi(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{a^2}{r\cdot\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\theta,\phi)}{\partial\phi^2},\\
&\gamma_{ks} = \frac{\mu_{ks}}{R},\quad J'_{k+1/2}(\mu_{ks}) = \frac{1}{2\cdot\mu_{ks}}\cdot J_{k+1/2}(\mu_{ks}),\quad \mu_{ks} > 0,\\
&k\in(0..\infty),\quad s\in(1..\infty),\\
&\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\sin(m\cdot\phi),\quad 1\le m\le k,\\
&\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\cdot J_{k+1/2}(\gamma_{ks}\cdot r)\cdot P_k^{(m)}(\cos(\theta))\cdot\cos(m\cdot\phi),\quad 0\le m\le k,\\
&\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\left[1-\frac{k\cdot(k+1)}{\mu_{ks}^2}\right]\cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}),\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{2\cdot\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\left[1-\frac{k\cdot(k+1)}{\mu_{ks}^2}\right]\cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}),\quad m=0,\\
&\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2 = \frac{\pi\cdot R^2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}\cdot\left[1-\frac{k\cdot(k+1)}{\mu_{ks}^2}\right]\cdot J_{k+1/2}^2(\mu_{ks}),\quad m\ge 1,\\
&f_{1kms} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi)\cdot\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&f_{2kms} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\widehat{f}(r,\theta,\phi)\cdot\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\cdot r^2\cdot\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi,\\
&T(r,\theta,\phi) = U(r,\theta,\phi) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{1kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot\frac{f_{1kms}}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2} +\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)}{\|\Psi_{2kms}(r,\theta,\phi)\|^2}\cdot\frac{f_{2kms}}{a^2\cdot\gamma_{ks}^2} + C,\quad C = \text{const}.
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

Глава 3

Решение больших разреженных матриц

Структуры хранения

После применения метода конечных элементов задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$A \cdot x = b. \tag{3.1}$$

Матрица A в такой системе обычно большая, но разреженная: почти все её элементы равны нулю. Это естественно для МКЭ — каждый симплекс связан лишь с небольшим числом соседних узлов, поэтому одна строка глобальной матрицы содержит ненулевые элементы только в позициях локальной окрестности узла. Хранить такую матрицу как плотную таблицу расточительно: большая часть памяти уходит на нули, а умножение матрицы на вектор выполняет много лишних операций.

В реализации МКЭ удобно использовать три представления одной и той же разреженной матрицы.

1. **COO** (coordinate list) хранит матрицу как список троек $(i,\ j,\ a_{ij})$, где i — номер строки, j — номер столбца, a_{ij} — значение элемента. Формат удобен при сборке глобальной матрицы: локальные матрицы симплексов просто добавляются в общий список, а дублирующиеся индексы суммируются.

2. **CSR** (compressed sparse row) хранит матрицу построчно в трёх массивах: значений ненулевых элементов, номеров их столбцов и массива смещений начала каждой строки. Формат неудобен для добавления новых элементов, зато оптимален для операции $A \cdot x$, которая выполняется на каждой итерации.

3. **CSC** (compressed sparse column) — столбцовый аналог CSR. Для решения системы он не нужен, но полезен при умножении двух разреженных матриц, когда требуется быстрый доступ к элементам по столбцам правой матрицы.

Все три формата для одной и той же матрицы A показаны на рисунке (3.1).

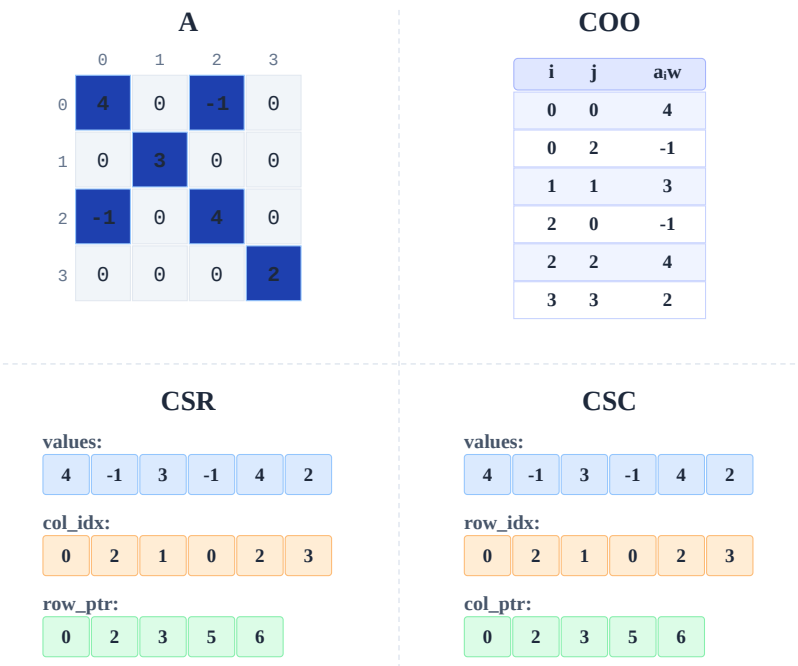

Рис. 3.1. Хранение разреженной матрицы A в форматах COO, CSR и CSC.

Далее поговорим о методе решения.

Метод решения

Для разреженных матриц большого размера прямые методы, строящие полное разложение матрицы, как правило, невыгодны: в процессе разложения в позициях исходных нулей возникают новые ненулевые элементы — так называемое *заполнение*. В результате теряется главное преимущество разреженной матрицы — малый объём памяти и малое число арифметических операций.

Мы будем решать систему (3.1) итерационным *предобусловленным методом сопряжённых градиентов* (PCG, preconditioned conjugate gradient). Метод применим к симметричным положительно определённым матрицам — именно такие возникают в задачах МКЭ с эллиптическими операторами и в неявных схемах теплопроводности. Распишем алгоритм по шагам.

Пусть $x_0 = 0$ — начальное приближение. Начальный остаток примет вид

$$r_0 = b - A \cdot x_0. \tag{3.2}$$

Начальное направление поиска и вектор предобуславливания имеют вид

$$P \cdot z_0 = r_0, \qquad p_0 = z_0, \tag{3.3}$$

где P — матрица предобуславливателя: она приближает A, но системы с ней решаются существенно дешевле. Далее на каждой итерации $k = 0, 1, 2, \ldots$ вычисляем

$$\alpha_k = \frac{r_k^T \cdot z_k}{p_k^T \cdot A \cdot p_k}, \tag{3.4}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot p_k, \tag{3.5}$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k \cdot A \cdot p_k, \tag{3.6}$$

$$P \cdot z_{k+1} = r_{k+1}, \tag{3.7}$$

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T \cdot z_{k+1}}{r_k^T \cdot z_k}, \tag{3.8}$$

$$p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_k \cdot p_k. \tag{3.9}$$

Итерации продолжаются, пока квадрат нормы остатка не опустится ниже заданного порога

$$r_{k+1}^T \cdot r_{k+1} < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Основная вычислительная стоимость каждой итерации — одно умножение разреженной матрицы на вектор $A \cdot p_k$. Именно поэтому перед началом итераций матрица конвертируется из COO в CSR: в этом формате умножение строки на вектор проходит только по ненулевым элементам.

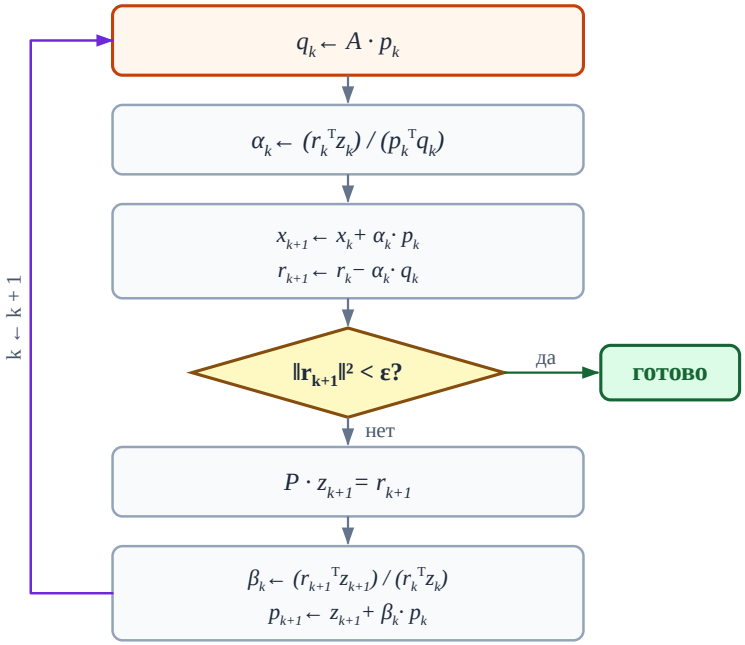

Рис. 3.2. Одна итерация PCG: шаг $A \cdot p_k$ — самый дорогостоящий.

Далее поговорим о предобуславливателях.

Предобуславливатели

Скорость сходимости метода сопряжённых градиентов определяется числом обусловленности матрицы A. Чем оно больше, тем медленнее метод сходится — для получения приемлемой точности требуется много итераций. Предобуславливатель P призван улучшить это число, заменяя исходную систему эквивалентной с матрицей

$P^{-1} \cdot A$, собственные значения которой должны сгруппироваться в узкой окрестности единицы.

На практике явно строить $P^{-1} \cdot A$ не нужно: на каждой итерации достаточно уметь решать вспомогательную задачу

$$P \cdot z_k = r_k, \tag{3.11}$$

используя z_k вместо исходного остатка r_k — см. формулы (3.7)–(3.8). Рассмотрим три варианта.

1. Без предобуславливания ($P = I$). В этом случае $z_k = r_k$, и метод совпадает с классическим методом сопряжённых градиентов. Вариант полезен для отладки, но для плохо обусловленных систем сходится медленно.

2. Предобуславливатель Якоби. В качестве P берётся диагональная часть матрицы A

$$P = \operatorname{diag}(A) = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}). \tag{3.12}$$

Применение сводится к поэлементному делению

$$z_{k,\,i} = \frac{r_{k,\,i}}{a_{ii}}. \tag{3.13}$$

Такой предобуславливатель практически бесплатен по памяти и времени, но учитывает только диагональ, не видя связей между переменными.

3. Неполное разложение Холецкого (IC). Для симметричной положительно определённой матрицы строится приближённое разложение

$$A \approx L \cdot L^T, \tag{3.14}$$

где L — нижнетреугольная матрица. В отличие от полного разложения Холецкого, элементы заполнения в позициях исходных нулей отбрасываются — структура ненулевых элементов L совпадает со структурой нижнего треугольника A. После построения L применение предобуславливателя состоит из двух треугольных подстановок

$$L \cdot y = r_k, \tag{3.15}$$

$$L^T \cdot z_k = y. \tag{3.16}$$

Рис. 3.3. Предобуславливатели: единичный ($P = I$), Якоби ($P = \operatorname{diag}(A)$) и неполный Холецкий ($A \approx L \cdot L^T$).

В задачах МКЭ неполное разложение Холецкого, как правило, даёт наилучший компромисс: оно дороже диагонального предобуславливателя (построение L и два треугольных прохода на итерацию), однако заметно сокращает число итераций. Для несимметричных или неопределённых систем, выходящих за рамки стандартных задач теплопроводности, следует обратиться к методам GMRES или BiCGSTAB с соответствующими предобуславливателями.

На этом с решением разреженных систем закончим — дальше поговорим о разбиении геометрии на симплексы.

Глава 4

Разбиение геометрии на симплексы

Сегментация

В одномерном случае разбиение геометрии на симплексы сводится к построению отрезков между соседними точками. Такой процесс будем называть сегментацией. Входными данными являются точки на прямой, выходными — набор одномерных симплексов.

Алгоритм в этом случае очень простой.

1. Берём все точки геометрии и сортируем их по координате x.
2. После сортировки соединяем каждую точку со следующей: если упорядоченные точки имеют координаты $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то симплексы имеют вид $s_i = [x_i,\, x_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots, n-1$.
3. Каждому полученному отрезку назначаем новый номер. Эти номера относятся уже не к исходным точкам, а к симплексам.

На рисунке «Сегментация» показаны оба ключевых действия: сначала точки упорядочиваются по координате, затем каждая соседняя пара превращается в отдельный симплекс.

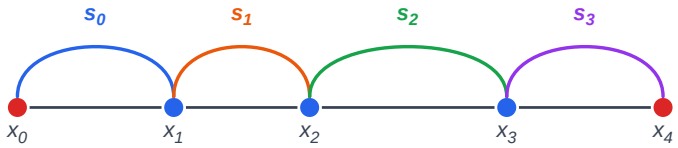

Рис. 4.1. Сегментация: упорядоченные точки и отрезки-симплексы.

В одномерном случае вся геометрия уже задана расположением точек на прямой, поэтому достаточно их упорядочить. Если две точки имеют одинаковую координату, такой случай должен быть обработан до сегментации: сам алгоритм предполагает, что отсортированная последовательность точек задаёт корректную цепочку отрезков.

Триангуляция

В двумерном случае симплексом служит треугольник, поэтому для заданного набора точек требуется построить такое семейство треугольников, которое целиком покрывает область и не имеет внутренних пересечений. Дополнительно мы требуем, чтобы итоговая сетка удовлетворяла *условию Делоне*: внутри описанной окружности каждого треугольника не должно быть других вершин триангуляции. Для невырожденного набора точек без заданных рёбер такая триангуляция максимизирует минимальный угол. Поэтому условие Делоне помогает уменьшить число плохо вытянутых треугольников, а устойчивость последующих конечно-элементных расчётов дополнительно зависит от качества входной геометрии, плотности точек и корректной обработки ограничений.

Строить делоневскую сетку самостоятельно — задача коварнее, чем кажется: расчётная область часто имеет форму квадрата или кольца, граница которых порождает вырожденные конфигурации, и на них наивные вычисления с плавающей точкой дают сбой (см. ниже). Поэтому низкоуровневое построение поручено зрелой библиотеке **CGAL** с точными геометрическими предикатами, а поверх неё реализован конвейер подготовки данных и проверок. Собственная реализация по классической схеме «разделяй и властвуй», с которой проект начинался, перенесена в приложение «Триангуляция методом „разделяй и властвуй“».

Геометрические предикаты

Почти все геометрические решения в алгоритме сводятся к двум знаковым предикатам.

Положение точки относительно ребра. Для направленного ребра с концами $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ и точки $p_3 = (x_3, y_3)$ знак выражения

$$\operatorname{orient}(p_1, p_2, p_3) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \tag{4.1}$$

определяет, лежит ли p_3 слева, справа или строго на прямой p_1p_2. Этот же предикат используется при построении выпуклой оболочки и при контроле ориентации треугольников.

Проверка условия Делоне. Для треугольника с вершинами p_1, p_2, p_3, перечисленными против часовой стрелки, и проверяемой точки $p_0 = (x_0, y_0)$ условие удобно записать через знак определителя

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \\ x_0 & y_0 & x_0^2 + y_0^2 & 1 \end{pmatrix} \le 0 \tag{4.2}$$

Если условие (4.2) выполнено, точка p_0 лежит вне описанной окружности или на её границе; если нет — внутри, и пару соседних треугольников необходимо перестроить. При обходе вершин по часовой стрелке знак определителя меняется на противоположный, поэтому ориентацию треугольника контролирует предикат (4.1).

Устойчивость на вырожденных данных

Предикаты (4.1) и (4.2) — это знаки определителей. На входах общего положения их значение заметно отличается от нуля, и обычная арифметика двойной точности даёт правильный знак. Но расчётная область в форме квадрата порождает два неприятных случая:

- *коллинеарность* — много граничных точек лежат строго на одной вертикали или горизонтали, и предикат (4.1) обращается в точный ноль;
- *концикличность* — четыре угла любой ячейки регулярной сетки лежат на одной окружности, и определитель (4.2) тоже точно равен нулю.

Беда в том, что при вычислении такого «нулевого» определителя в арифметике с плавающей точкой накапливается ошибка округления, и вместо нуля получается маленькое число *произвольного* знака — «шум». Разные части алгоритма, получив для одной и той же тройки точек противоречивые ответы, начинают строить несогласованную сетку: вдоль границы возникают плоские (нулевой площади) треугольники, нарушается условие Делоне.

Решение — считать знак предиката *точно*. Используемая библиотека вычисляет определители с помощью отфильтрованной арифметики: быстрый предварительный расчёт с гарантированной оценкой погрешности, а в сомнительных (близких к нулю) случаях — точный пересчёт. В результате знак никогда не бывает ошибочным, а истинный ноль распознаётся как ноль. Важно, что точность нужна только предикатам: алгоритм не строит новых точек — вершины сетки в точности совпадают с исходными, — поэтому точная арифметика построений не требуется, и координаты остаются обычными числами двойной точности. Такой компромисс почти не замедляет работу.

Триангуляция с ограничениями

На практике помимо самих точек нужно учитывать заданные пользователем рёбра — границы расчётной области и контуры отверстий. Такие рёбра должны обязательно присутствовать в итоговой сетке и не разрушаться локальными перестройками. Эта задача известна как *триангуляция Делоне с ограничениями*: вблизи ребра-ограничения условие Делоне может законно нарушаться, зато сетка гарантированно повторяет заданные контуры. Сама операция вставки ребра описана ниже, в разделе о реализации, а во всех подробностях — в приложении.

Построение сетки расчётной области

Полный конвейер построения сетки для области с границей и отверстиями состоит из шести шагов.

1. Контуры — внешний и контуры отверстий — разбиваются на отрезки длиной не больше целевого шага $\sqrt{S/n}$, где S — площадь области, а n — число внутренних точек; так плотность граничных точек согласуется с плотностью внутренних и снижается риск появления вытянутых треугольников вдоль границы.

2. Внутри области (вне отверстий) методом отбраковки генерируются n случайных точек, при необходимости — с заданным минимальным расстоянием между ними.

3. В пустую триангуляцию по одной вставляются *внутренние* точки, затем *граничные* точки всех контуров.

4. Каждый отрезок каждого контура принудительно вставляется в сетку как *ребро-ограничение*.

5. Полученная триангуляция — она пока покрывает всю выпуклую оболочку — проверяется на корректность, при любом нарушении построение прерывается с ошибкой.

6. Треугольники, центр тяжести которых лежит вне области (внутри отверстия или за внешним контуром), отбрасываются — остаётся сетка собственно расчётной области.

Контроль на пятом шаге служит страховкой и включает четыре проверки:

- *полнота вершин* — каждая исходная точка присутствует в сетке как вершина, и в сетке нет посторонних вершин;
- *число треугольников* — оно должно совпадать со следующим из формулы Эйлера значением $T = 2N - 2 - h$, где N — число вершин, а h — число вершин на выпуклой оболочке;
- *непересекаемость* — никакие два треугольника не пересекаются по внутренностям рёбер;
- *условие Делоне* — проверяется для пар треугольников, общая сторона которых не является ребром-ограничением; около ограничений условие Делоне может законно нарушаться.

Хранение триангуляции

Готовая триангуляция хранится не просто списком треугольников, а структурой, где каждому ребру сопоставляются смежные с ним треугольники. По общему ребру всегда можно быстро найти пару треугольников, потенциально нарушающих условие Делоне, — это и используется при flip-операциях. По этой же структуре рёбра, принадлежащие единственному треугольнику, дают границу сетки: до вырезания отверстий это выпуклая оболочка. На выходе получается набор треугольных симплексов, по которым на дальнейших этапах строятся локальные матрицы жёсткости и собирается глобальная система метода конечных элементов.

Реализация: библиотека CGAL

CGAL (Computational Geometry Algorithms Library) — открытая библиотека вычислительной геометрии на C++ и де-факто стандарт в этой области. Из неё используются классы *Delaunay_triangulation_2* (обычная триангуляция Делоне) и *Constrained_Delaunay_triangulation_2* (триангуляция с ограничениями) с ядром

Exact_predicates_inexact_constructions_kernel. Поэтапный конвейер, описанный выше, вставка ограничений и проверки пятого шага реализованы поверх неё.

Сетку CGAL строит *инкрементально* — точки вставляются по одной в уже готовую триангуляцию.

- Вместо вспомогательного «супертреугольника», который пришлось бы подбирать по размеру и удалять в конце, используется *бесконечная вершина*: выпуклая оболочка текущей сетки замыкается фиктивными треугольниками, третьей вершиной которых служит формальная «точка на бесконечности».

- Очередная точка сначала *локализуется* «прогулкой» по сетке: от стартового треугольника алгоритм по предикату ориентации (4.1) шагает от соседа к соседу в сторону точки.

- Найденный треугольник делится вставляемой точкой на три (точка на ребре делит два смежных треугольника на четыре), после чего условие Делоне восстанавливается каскадом flip-операций, расходящимся от новой вершины: если по предикату (4.2) четвёртая вершина соседнего треугольника попадает в описанную окружность, общая диагональ четырёхугольника заменяется на противоположную (рисунок Замена диагонали).

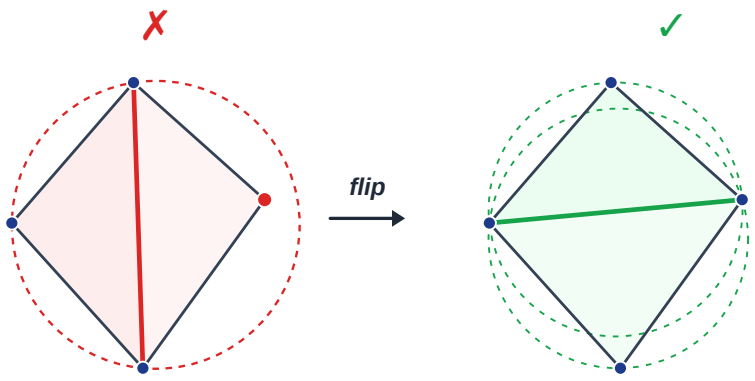

Рис. 4.2. Локальная перестройка пары треугольников (flip) для восстановления условия Делоне.

Ребро-ограничение вставляется в готовую сетку отдельной операцией: все пересечённые отрезком треугольники удаляются, образовавшаяся пустота делится отрезком на две цепочки вершин, и каждая цепочка заново триангулируется; при последующих перестройках flip через ребро-ограничение запрещён. Поскольку к моменту вставки оба конца каждого отрезка уже являются вершинами сетки, а контуры не пересекаются, новые (штейнеровы) точки не появляются. Подробный разбор этой операции — в приложении.

Выбранное ядро сочетает *точные предикаты* с *неточными построениями*. Предикаты вычисляются по схеме фильтрации: сначала интервальная арифметика с гарантированной оценкой погрешности и лишь тогда, когда интервал накрывает ноль, — точный пересчёт в многоразрядной арифметике. Именно это обеспечивает корректную обработку коллинеарных и конциклических конфигураций квадрата. Построения же остаются обычными числами двойной точности: новых точек алгоритм

не создаёт, поэтому каждая вершина итоговой сетки без потерь сопоставляется исходной точке. На случайном порядке вставки — а наш генератор случайных точек его и даёт — ожидаемая трудоёмкость построения составляет $O(n \log n)$.

Примеры

Все сетки ниже — реальные результаты описанного конвейера (утилита *triangulate* вычислительного ядра), отрисованные без какой-либо ретуши.

На рисунке «Квадрат» показана триангуляция единичного квадрата при $n = 200$ внутренних точках: после разбиения границы с шагом $\sqrt{S/n}$ сетка содержит 260 вершин и 458 треугольников. Граница квадрата — это десятки строго коллинеарных точек, тот самый вырожденный вход, на котором плавающая арифметика без точных предикатов даёт сбой; здесь же вдоль всей границы сетка корректна, плоских треугольников нет.

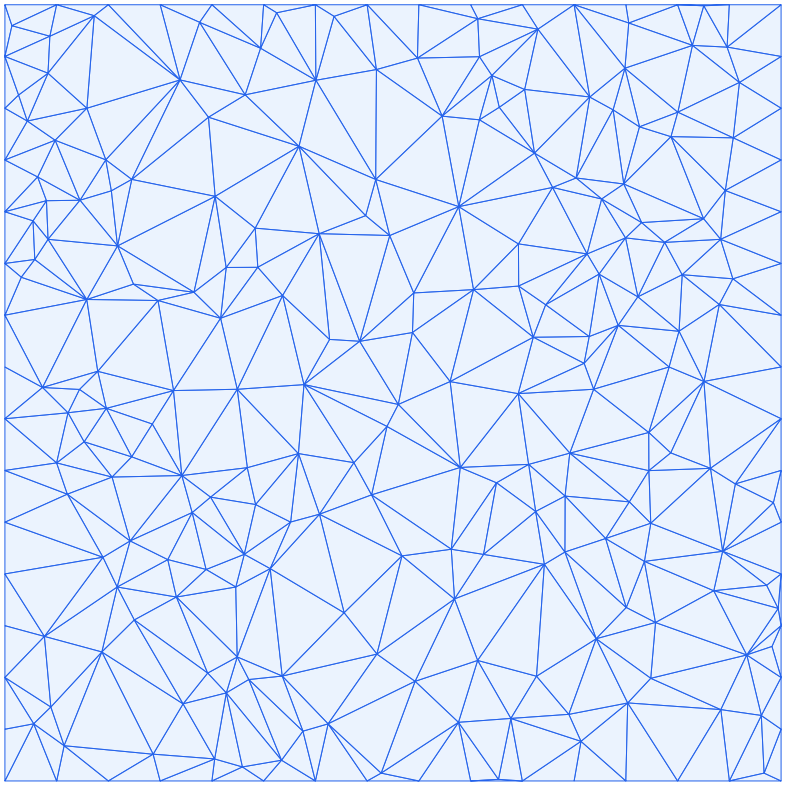

Рис. 4.3. Триангуляция единичного квадрата ($n = 200$; 260 вершин, 458 треугольников): коллинеарные граничные точки обработаны корректно.

Рисунок «Квадрат с отверстием» демонстрирует работу рёбер-ограничений: в квадрате вырезано квадратное отверстие, оба контура вставлены как ограничения ($n = 300$; 396 вершин, 696 треугольников). Сетка точно повторяет контур отверстия и не заходит внутрь — треугольники, чей центр тяжести попал в отверстие, отброшены на финальном шаге конвейера.

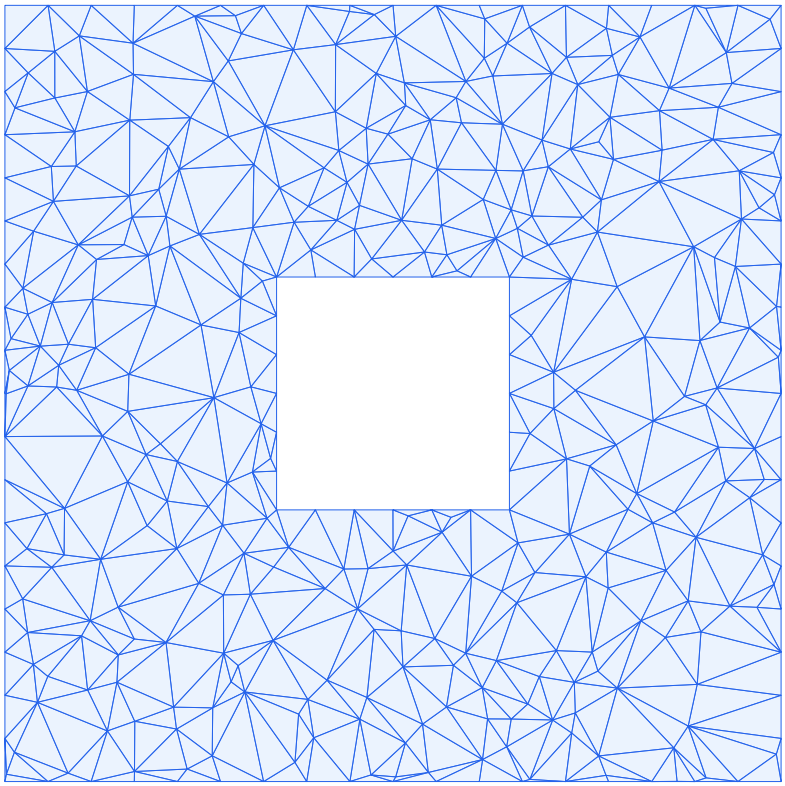

Рис. 4.4. Триангуляция квадрата с отверстием ($n = 300$; 396 вершин, 696 треугольников): контуры вставлены как рёбра-ограничения.

Наконец, на рисунке «Кольцо» показана триангуляция кольца (внешний радиус 1, внутренний 0.4) при $n = 1000$: итоговая сетка содержит 1192 вершины и 2192 треугольника. Оба контура аппроксимированы многоугольниками (128 и 64 вершины) и вставлены как рёбра-ограничения, поэтому сетка повторяет заданную полигональную границу области, а внутренние точки порождают близкую к равномерной делоневскую сетку.

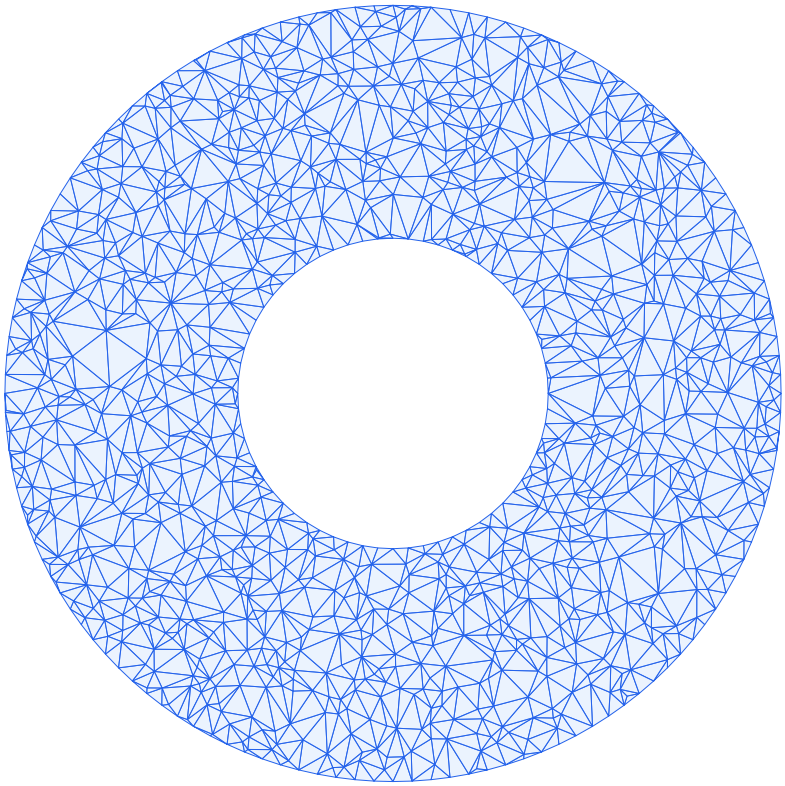

Рис. 4.5. Триангуляция кольца ($R = 1$, $r = 0.4$, $n = 1000$; 1192 вершины, 2192 треугольника): внешний контур и граница отверстия вставлены как рёбра-ограничения.

Тетраэдризация

В трёхмерном случае симплексом является тетраэдр, поэтому аналогом триангуляции становится *тетраэдризация*: объёмную область нужно разбить на тетраэдры так, чтобы они не накладывались друг на друга, целиком покрывали область и попарно пересекались только по общим граням, рёбрам или вершинам. Как и в двумерном случае, мы требуем выполнения *условия Делоне* — теперь уже для описанной *сферы* тетраэдра: внутри неё не должно быть других вершин сетки. Это условие помогает избегать части плохо вытянутых элементов, но само по себе не гарантирует хорошую форму всех тетраэдров; поэтому дальше дополнительно задаются критерии качества и выполняется оптимизация сетки.

Минимальный трёхмерный симплекс строится на четырёх точках:

$$T = (p_1, p_2, p_3, p_4). \tag{4.3}$$

Почему трёхмерный случай сложнее

Классическая схема «разделяй и властвуй», описанная для триангуляции в приложении, в трёхмерном случае существенно усложняется. При сшивании двух частей в плоскости зазор между ними — это пара цепочек рёбер, и заполнить его легко. В пространстве зазор образуется уже целым *набором граней*, и его приходится корректно закрывать тетраэдрами. Кроме того, локальная перестройка Делоне в плоскости

— это простая замена диагонали четырёхугольника (flip 2–2), тогда как в пространстве элементарные перестройки (flip 2–3 и 3–2) меняют само число тетраэдров и требуют аккуратной проверки допустимости. Наконец, в отличие от плоскости, не всякую трёхмерную область можно разбить на тетраэдры *без добавления новых точек* — классический пример: многогранник Шёнхардта.

По этим причинам низкоуровневую тетраэдризацию мы не реализуем вручную, а делегируем той же библиотеке CGAL (см. ниже), сосредотачиваясь на *постановке задачи*: описании области, её границы и требований к качеству сетки.

Область как кусочно-линейный комплекс

Расчётная трёхмерная область задаётся своей *границей* — замкнутой ориентированной триангулированной поверхностью. Такое описание называют кусочно-линейным комплексом (PLC, piecewise linear complex): набор вершин, рёбер и плоских граней, согласованно покрывающих поверхность тела. Это прямой трёхмерный аналог граничных контуров из двумерной триангуляции: там границей служили замкнутые ломаные, здесь — замкнутые треугольные сетки.

Для трёх характерных тел поверхность строится явно:

- **куб** — восемь вершин и двенадцать треугольных граней (по две на каждую из шести сторон);
- **шар** — икосфера: икосаэдр, грани которого несколько раз разбиваются на четыре и проецируются на сферу;
- **полый цилиндр** — внешняя и внутренняя боковые поверхности плюс два кольцевых торца; получается замкнутая поверхность рода 1, охватывающая тело со сквозным отверстием.

Ограничения: восстановление рёбер и граней

Грани и рёбра граничной поверхности играют роль *ограничений* — так же, как непересекаемые рёбра в двумерной триангуляции Делоне с ограничениями. Они обязаны присутствовать в итоговой сетке: тетраэдры не должны пересекать границу тела по внутренности, а острые рёбра (рёбра куба, кромки торцов цилиндра) должны сохраняться как рёбра сетки, а не «срезаться». Острые рёбра выделяются автоматически по двугранному углу между смежными гранями и восстанавливаются отдельно, после чего поверхность остаётся вписанной в объёмную сетку.

Критерии качества

В отличие от плоского случая, где плотность задавалась лишь числом и расположением точек, объёмная сетка строится под управлением *полей размера* и *критериев формы*:

- ограничение на размер тетраэдра управляет плотностью сетки: в CGAL оно задаётся параметром *cell_size*, то есть верхней границей радиуса описанной сферы тетраэдра. В демонстрационной утилите целевой масштаб оценивается как $\sqrt[3]{V/n}$, где V — объём тела, а n — заданное число точек;

- ограничение на отношение радиуса описанной сферы к кратчайшему ребру (radius–edge ratio) не даёт появляться многим вытянутым тетраэдрам-«иглам»; плоские «сливеры», которые этот критерий не отлавливает, устраняются финальной оптимизацией;

- критерии аппроксимации границы (угол, размер и отклонение граничных треугольников) управляют точностью поверхностной сетки, а для шара и цилиндра точность также зависит от того, насколько хорошо построена исходная полиэдральная аппроксимация поверхности.

Алгоритм добавляет внутренние точки (вставка по Делоне) и измельчает сетку до тех пор, пока все критерии не будут выполнены. Затем финальная оптимизация — сдвиг вершин и выдавливание сливеров, то есть перевзвешивание вершин для удаления почти плоских тетраэдров, — улучшает форму элементов.

Реализация

Низкоуровневое построение делегировано модулю *Mesh_3* библиотеки **CGAL** — той же, что используется для двумерной триангуляции. Граничная поверхность каждого тела представляется типом *Mesh_polyhedron_3<K>::type*, область — классом *Polyhedral_mesh_domain_with_features_3* (с автоматическим выделением острых рёбер), а собственно тетраэдризация выполняется вызовом *make_mesh_3* с описанными выше критериями (*Mesh_criteria_3*). Используется ядро точных предикатов *Exact_predicates_inexact_constructions_kernel*, благодаря чему проверки принадлежности сфере и ориентации тетраэдров вычисляются устойчиво. На выходе получается набор тетраэдральных симплексов вида (4.3), по которым на дальнейших этапах строятся локальные матрицы и собирается глобальная система метода конечных элементов.

Примеры

Все сетки ниже — реальные результаты утилиты *tetrahedralize* вычислительного ядра; в тексте указаны параметры полной тетраэдральной сетки. Интерактивные модели показывают её поверхностную оболочку: поверхность можно вращать мышью или пальцем, а раскраска по освещённости подчёркивает граничные грани тетраэдров.

На рисунке «Куб» показана тетраэдризация куба со стороной 1 при $n = 600$: 674 вершины, 2809 тетраэдров. Грани куба плоские, поэтому вся «кривизна» сетки уходит внутрь, а на поверхности видны треугольные грани приграничных тетраэдров; рёбра куба сохранены как острые.

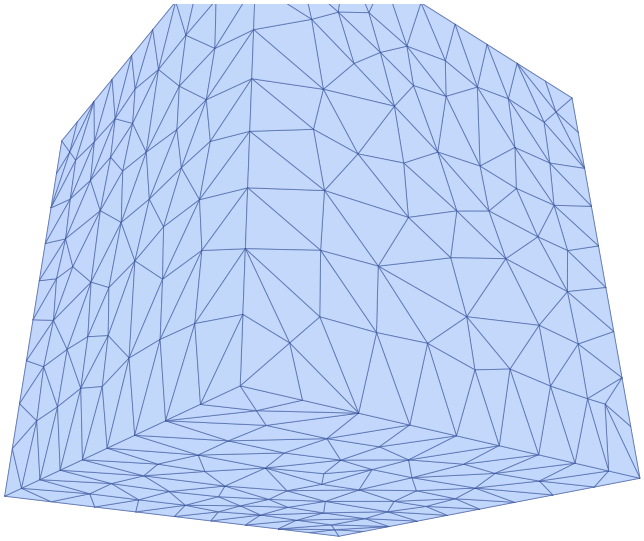

Рис. 4.6. Тетраэдризация куба (сторона 1, $n = 600$; 674 вершины, 2809 тетраэдров).
(интерактивная версия на сайте)

Рисунок «Шар» показывает работу поверхностной аппроксимации: икосферная граница шара ($R = 1$, $n = 800$; 737 вершин, 3417 тетраэдров) приближает сферу с заданной точностью, без острых рёбер.

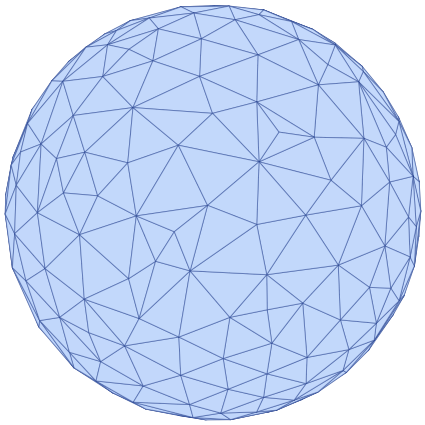

Рис. 4.7. Тетраэдризация шара ($R = 1$, $n = 800$; 737 вершин, 3417 тетраэдров): граница аппроксимирует сферу с заданной точностью.
(интерактивная версия на сайте)

Наконец, на рисунке «Полый цилиндр» показан полый цилиндр ($R = 1$, $r = 0.4$, высота 1.5) при $n = 1000$: 1118 вершин, 4588 тетраэдров. Сквозное отверстие и кромки торцов сохранены ограничениями: острые рёбра выделены по двугранному углу и восстановлены в сетке.

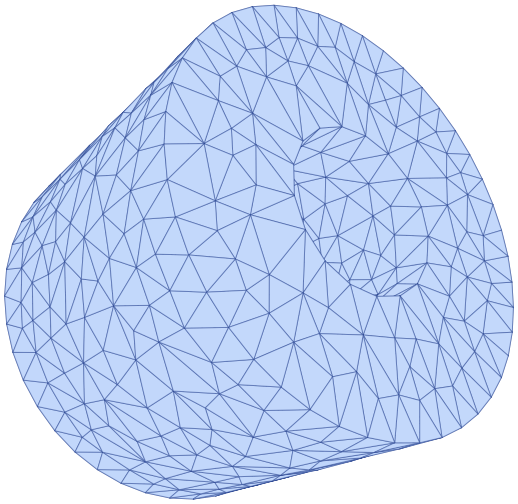

Рис. 4.8. Тетраэдризация полого цилиндра ($R = 1$, $r = 0.4$, $h = 1.5$, $n = 1000$; 1118 вершин, 4588 тетраэдров): сквозное отверстие и кромки торцов сохранены. (интерактивная версия на сайте)

Глава 5

Постановка задачи МКЭ

Вариационная постановка задачи

Эта глава — ключевая: здесь закладывается база метода конечных элементов. Освоив её, вы сможете применять тот же подход к уравнениям других типов, содержащих линейный оператор.

Мы рассмотрели аналитический подход к решению уравнения теплопроводности, однако для более сложных геометрий он быстро становится громоздким или вообще неприменимым, поэтому теперь приступим к нашей главной теме — численному решению уравнения теплопроводности. Ещё раз запишем уравнение (1.8) для удобства, заменив T на u

$$\frac{\partial u(M,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta u(M,t) + f(M,t).$$

Нам надо подобрать функцию $u(M,t)$, удовлетворяющую уравнению и граничным условиям; граничные условия предварительно гомогенизируем, как это делалось в аналитической части: неоднородность уйдёт в функцию плотности тепловых источников и в начальное условие, а в конце добавится к решению. Сама задача может быть представлена в виде уравнения Эйлера

$$L[u] = f, \tag{5.1}$$

где $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \cdot \Delta$ — линейный оператор дифференциального уравнения, u — искомая функция, f — функция нагрузки. Как я сказал выше, наше уравнение тоже подпадает под эту форму, а значит, мы можем применить известный подход к решению уравнения Эйлера. Таким подходом является метод Бубнова–Галёркина: в слабой форме требуется, чтобы для любой пробной функции $\upsilon(M,t)$ в любой момент времени t выполнялось равенство

$$\int_M L[u(M,t)] \cdot \upsilon(M,t)\, dM = \int_M f(M,t) \cdot \upsilon(M,t)\, dM. \tag{5.2}$$

Зачем всё это нужно и что за пробные функции? Выше, при построении аналитического решения, мы видели, как решение раскладывается в ряд Фурье — здесь происходит то же самое: если выбрать функции ортогональными, задача распадается на несколько независимых друг от друга решений, которые финально сложатся в искомое. Свобода выбора очень большая, поэтому функции можно взять максимально простыми и удобными для вычислений. Достаточно взглянуть на уравнение

выше, и станет понятно, что решение может быть представлено суммой $u(M,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \upsilon_i(M,t)$, где a_i — коэффициенты, которые нужно найти, а $\upsilon_i(M,t)$ — базисные функции; в методе Бубнова–Галёркина пробные функции берутся из того же семейства. Подход к численному решению аналогичен аналитическому и тоже по сути сводится к поиску коэффициентов при известных базисных функциях. Я бы сказал больше: никакого принципиального разделения на аналитические и численные методы нет — по сути это одно и то же.

Интегралы писать неудобно, поэтому запишем (5.2) в виде скалярного произведения

$$(L[u], \upsilon) = (f, \upsilon). \tag{5.3}$$

Известно, что уравнение Эйлера связано с функционалом следующим образом

$$I(\upsilon) = (L[\upsilon], \upsilon) - 2 \cdot (f, \upsilon). \tag{5.4}$$

Минимизация этого функционала возвращает нас к уравнению Эйлера, а функция υ, на которой достигается минимум, и есть искомое решение u. Покажем это.

Если на функции u достигается минимум функционала, дадим ей приращение $u + \epsilon \cdot \upsilon$, где ϵ — малое число, а υ — произвольная функция, и проведём преобразования, приняв во внимание очевидное соотношение $I(u) \leq I(u + \epsilon \cdot \upsilon)$

$$I(u + \epsilon \cdot \upsilon) = (L[u + \epsilon \cdot \upsilon], u + \epsilon \cdot \upsilon) - 2 \cdot (f, u + \epsilon \cdot \upsilon),$$

$$I(u + \epsilon \cdot \upsilon) = I(u) + 2 \cdot \epsilon \cdot [(L[u], \upsilon) - (f, \upsilon)] + \epsilon^2 \cdot (L[\upsilon], \upsilon).$$

При раскрытии скобок мы воспользовались самосопряжённостью оператора: $(L[\upsilon], u) = (L[u], \upsilon)$. Для производной по времени это, строго говоря, не так — аккуратный разбор этого момента дан в приложении «Функционал метода Бубнова–Галёркина». Так как ϵ может быть отрицательным, для выполнения условия минимума необходимо, чтобы линейный по ϵ член обращался в нуль, то есть чтобы выполнялось (5.3). Таким образом, для того чтобы решить уравнение Эйлера методом Бубнова–Галёркина, нужно минимизировать функционал (5.4).

Решение уравнений аналитически показало нам подход разделения переменных, поэтому попробуем применить эти знания здесь. Логически понятно, что нестационарность не добавляет сложности, связанной с геометрией: геометрия отдельно, время отдельно. В идеале решение нестационарного уравнения должно сводиться к последовательному решению N стационарных задач. В приложении «Функционал метода Бубнова–Галёркина» мы получили функционалы, минимизация которых даёт решение нестационарной (I.6) и стационарной (I.5) задач.

Форма решения

Аналитическое решение для простых геометрий можно получить многими методами; одним из них — так называемым методом Фурье — мы уже пользовались в разделе «Общее аналитическое решение краевой задачи». Мы заранее предполагаем,

что решение, ещё до того как оно получено, уже разложено в ряд Фурье — разложения по отдельным координатам при этом считаются взаимно независимыми, — и нам остаётся определить конкретные значения общего решения (2.17). Разница в том, что в методе Фурье мы разбиваем решение, но не разбиваем геометрию — поэтому аналитическое решение возможно лишь для ограниченного набора геометрий, — а в МКЭ мы разбиваем саму геометрию на простые элементы, которые обычно называют симплексами. Решение на этих элементах приближается так называемыми пробными функциями.

Итак, разобьём пространство M на подпространства-симплексы σ_h, которые полностью покрывают исходное пространство. В каждом подпространстве будет существовать своё решение $\upsilon_h = T(\sigma_h)$ — сужение искомого решения на симплекс, а совокупность таких решений и будет решением краевой задачи. Далее поговорим о симплексах.

Симплексы

Прежде чем описывать решение, область, на которой оно ищется, нужно разбить на простейшие непересекающиеся элементы — симплексы. Способы такого разбиения подробно разобраны в главе «Разбиение геометрии на симплексы», поэтому здесь лишь кратко напомним результат, на который будем опираться дальше.

В одномерном случае симплексом служит отрезок. Интервал l, на котором ищется решение, разбивается на n симплексов-отрезков $s_i,\ i \in (1..n)$; в отличие от метода конечных разностей их длины могут быть разными. Построение таких отрезков описано в разделе «Сегментация». Пример приведён на рисунке Симплексы-отрезки: длина симплекса s_2 равна $x_2 - x_1$.

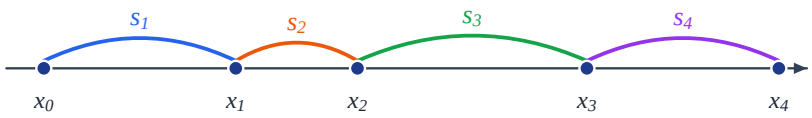

Рис. 5.1. Одномерные симплексы-отрезки $s_1, \ldots, s_n$; их длины могут быть разными.

В двумерном случае симплексом выбран треугольник. Область S разбивается на n непересекающихся треугольников $t_i,\ i \in (1..n)$ с помощью триангуляции Делоне с ограничениями — этому посвящён раздел «Триангуляция». Пример показан на рисунке Симплексы-треугольники.

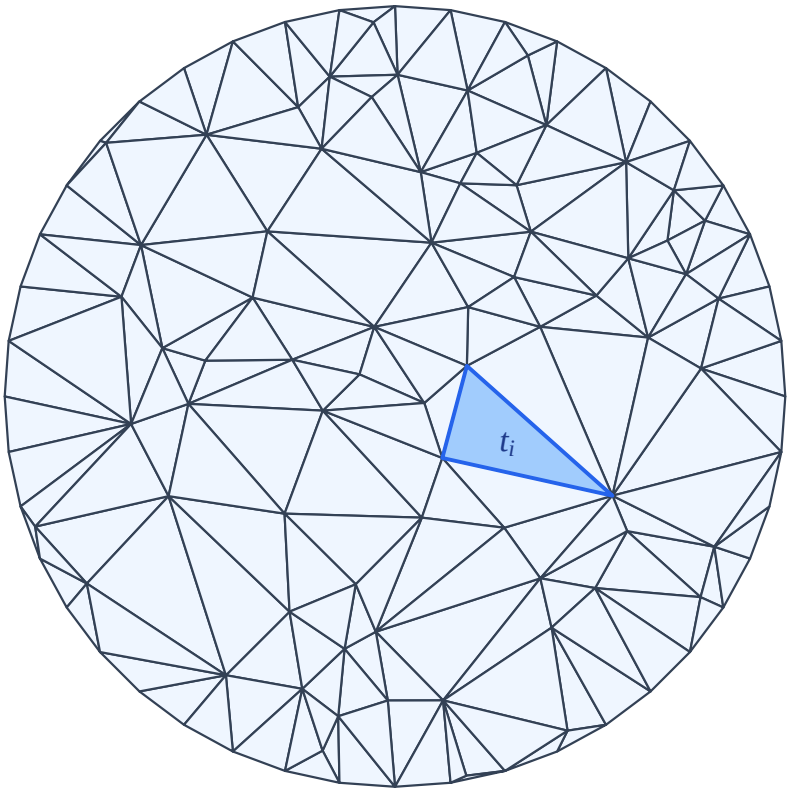

Рис. 5.2. Выпуклая область, покрытая непересекающимися треугольниками-симплексами (реальная триангуляция); один симплекс выделен.

В трёхмерном случае симплексом является тетраэдр. Область V разбивается на n непересекающихся тетраэдров $t_i,\ i \in (1..n)$; соответствующая процедура обсуждается в разделе «Тетраэдризация». Минимальный симплекс и его сосед по общей грани показаны на рисунке Симплексы-тетраэдры.

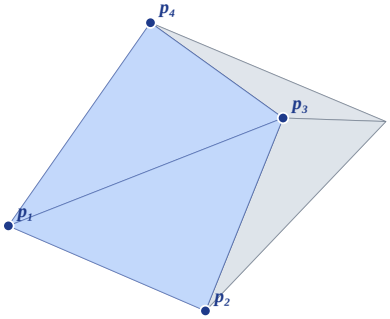

Рис. 5.3. Тетраэдрический симплекс на вершинах $p_1, \ldots, p_4$ и его сосед по общей грани (серый).

(интерактивная версия на сайте)

После того как область разбита на симплексы, на каждом из них нужно описать решение υ_h.

Пробные функции

Функция, которая описывает поведение на симплексе, называется пробной, вероятно потому, что на заре развития метода, ввиду слабости вычислительной техники, приходилось пробовать и подбирать функции, которые бы аппроксимировали решение. Существует огромное количество пробных функций, можно использовать и тригонометрические даже, но на практике распространение получили полиномиальные функции, что как бы намекает на разложение решения в ряд Тейлора, по аналогии с разложением в ряд Фурье, за тем лишь исключением, что разложение в ряд Тейлора мы осуществляем не на всей геометрии, а только лишь на симплексах, что позволяет нам использовать максимально простые полиномы. Выбирались, как правило, полиномы 3-й степени, с 9-10 коэффициентами, и это требовало добавления дополнительных точек на симплекс, чтобы эти коэффициенты определить, что приводило к 9-10 СЛАУ на каждом симплексе, но решать их нужно было всего один раз, что с точки зрения вычислительной не проблема даже по тем временам. Конечно, это здравый подход, но я решил «попробовать» построить решение с помощью максимально простых полиномов, а именно полиномов вида:

$$\upsilon_h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \phi_i(x, y, z), \tag{5.5}$$

где n — количество узлов, q_i — коэффициенты, $\phi_i(x, y, z)$ — так называемые функции «крышки», которые равны 1 на узле симплекса и нулю в остальных узлах геометрии, и как раз-таки за счёт того, что функции «крышки» представляют из себя полиномы, пробные функции будут тоже полиномами.

$$\phi_i(x, y, z) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y + d_i \cdot z, \tag{5.6}$$

где i — номер узла, а не степень, a_i, b_i, c_i, d_i — коэффициенты, зависящие от геометрии конкретного узла i на симплексе. После того, как геометрия будет разбита на симплексы, нужно будет их один раз вычислить для каждого узла симплекса. Функцию «крышку» я записал для трёхмерной системы координат, но дальше будем работать с двумерной или одномерной так же.

Давайте подробнее поговорим про функции «крышки» и начнём с одномерного случая.

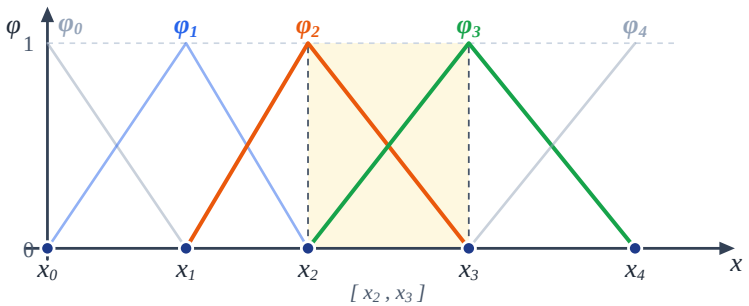

Рис. 5.4. Функции «крышки» для симплексов-отрезков.

На рисунке Функции «крышки» для симплексов-отрезков приведено пять функций «крышек» $\phi_0, \ldots, \phi_4$ и четыре симплекса: в общей сложности для одномерного пространства на n точек приходится n функций «крышек» и $n-1$ симплексов соответственно. На краях, в узлах x_0 и x_4, функции имеют вид половинок «крышек». Примем $i = 3$, тогда симплекс между точками x_{i-1} и x_i (на рисунке он выделен заливкой и ограничен пунктирными линиями) определяется следующим образом: $\upsilon_{i-1}(x) = q_{i-1} \cdot \phi_{i-1}(x) + q_i \cdot \phi_i(x)$ за счёт того, что остальные функции «крышки» не оказывают влияния на него ввиду того, что принимают нулевое значение на интервале (x_{i-1}, x_i). Функция $\phi_{i-1}(x)$ проходит через точки $(x_{i-1}, 1)$ и $(x_i, 0)$, а функция $\phi_i(x)$ через точки $(x_{i-1}, 0)$ и $(x_i, 1)$. Тогда справедливо

$$\begin{cases} a_{i-1} + b_{i-1} \cdot x_{i-1} = 1 \\ a_{i-1} + b_{i-1} \cdot x_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_i + b_i \cdot x_{i-1} = 0 \\ a_i + b_i \cdot x_i = 1 \end{cases} \tag{5.7}$$

Решение систем соответственно

$$\begin{cases} a_{i-1} = \dfrac{-x_i}{x_{i-1} - x_i} \\ b_{i-1} = \dfrac{1}{x_{i-1} - x_i} \end{cases} \quad \begin{cases} a_i = \dfrac{x_{i-1}}{x_{i-1} - x_i} \\ b_i = \dfrac{-1}{x_{i-1} - x_i} \end{cases} \tag{5.8}$$

Если для одномерных симплексов функции «крышки» имеют вид линий на плоскости, то для двумерных симплексов уже будут поверхности в трёхмерном пространстве.

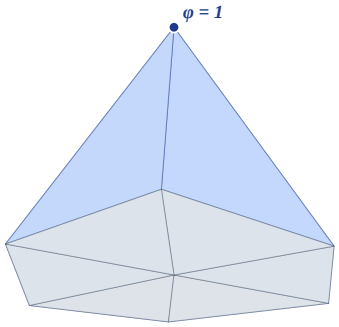

Рис. 5.5. Функции «крышки» для симплексов-треугольников.
(интерактивная версия на сайте)

Мы взяли все три точки треугольника t_2 с рисунка Симплексы-треугольники и построили три пирамиды, вершинами которых являются «поднятые» на величину 1 вершины исходного треугольника, а основаниями пирамид являются многоугольники с того же рисунка, содержащие внутри себя вершины треугольника. Так как нашему исследованию подвергается треугольник t_2 и мы планируем записывать пробную функцию для него, отбросим лишние части и перестроим рисунок, оставив только плоскости, проецируемые на треугольник.

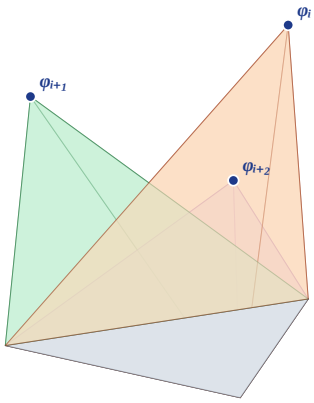

Рис. 5.6. Части функций «крышек» для симплекса-треугольника.
(интерактивная версия на сайте)

На рисунке Части функций «крышек» для симплекса-треугольника для двумерного пространства, как и для одномерного, каждому из n узлов сетки соответствует ровно одна функция «крышка», так что всего их n; число же симплексов-треугольников зависит от конкретной триангуляции. Заметим также, что в пределах одного треугольника отличны от нуля ровно три функции «крышки» — по числу его вершин. Обозначим точки симплекса через $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$. В итоге пробная функция примет вид $v_i(x, y) = q_i \cdot \phi_i(x, y) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x, y) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x, y)$. Для определения постоянных $a_i, b_i, c_i,\ a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1},\ a_{i+2}, b_{i+2}, c_{i+2}$ примем во внимание, что координата z отлична от нуля только на вершинах пирамид, в итоге получим три системы уравнений

$$\begin{cases} a_i + b_i \cdot x_i + c_i \cdot y_i = 1 \\ a_i + b_i \cdot x_{i+1} + c_i \cdot y_{i+1} = 0 \\ a_i + b_i \cdot x_{i+2} + c_i \cdot y_{i+2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_i + c_{i+1} \cdot y_i = 0 \\ a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_{i+1} + c_{i+1} \cdot y_{i+1} = 1 \\ a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_{i+2} + c_{i+1} \cdot y_{i+2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_i + c_{i+2} \cdot y_i = 0 \\ a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_{i+1} + c_{i+2} \cdot y_{i+1} = 0 \\ a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_{i+2} + c_{i+2} \cdot y_{i+2} = 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

Решение уравнений будет соответственно

$$\begin{cases} a_i = (x_{i+1} \cdot y_{i+2} - x_{i+2} \cdot y_{i+1}) / \det \\ b_i = (y_{i+1} - y_{i+2}) / \det \\ c_i = (-x_{i+1} + x_{i+2}) / \det \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+1} = (-x_i \cdot y_{i+2} + x_{i+2} \cdot y_i) / \det \\ b_{i+1} = (-y_i + y_{i+2}) / \det \\ c_{i+1} = (x_i - x_{i+2}) / \det \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+2} = (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) / \det \\ b_{i+2} = (y_i - y_{i+1}) / \det \\ c_{i+2} = (-x_i + x_{i+1}) / \det \end{cases} \tag{5.10}$$

где $\det = x_i \cdot y_{i+1} - x_i \cdot y_{i+2} - x_{i+1} \cdot y_i + x_{i+1} \cdot y_{i+2} + x_{i+2} \cdot y_i - x_{i+2} \cdot y_{i+1}$ — определитель матрицы.

Сложность работы с трёхмерной системой координат заключается в том, что решение сложно визуализировать, как и функции «крышки», поэтому обойдёмся только формулами. Вообще, в данном руководстве основной акцент будет делаться на двумерные краевые задачи, так как они лишены тривиальности, в отличие от одномерных, и в то же время хорошо визуализируются. Итак, в трёхмерном пространстве тетраэдр служит основанием четырёхмерного пентахорона «крышки». По аналогии с формулами выше смеем предположить, что функция «крышка» будет иметь значение 1 в одной из точек тетраэдра, поднятой в четырёхмерное пространство перпендикулярно основанию, и будет нулём в остальных точках тетраэдризации, при

этом пробная функция будет иметь вид $\upsilon_h(x,y,z) = q_1 \cdot \phi_1(x,y,z) + q_2 \cdot \phi_2(x,y,z) + q_3 \cdot \phi_3(x,y,z) + q_4 \cdot \phi_4(x,y,z)$. Для определения постоянных a_i, b_i, c_i, d_i, $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, d_{i+1}$, $a_{i+2}, b_{i+2}, c_{i+2}, d_{i+2}$, $a_{i+3}, b_{i+3}, c_{i+3}, d_{i+3}$ примем во внимание, что координата μ четвёртого измерения отлична от нуля только на вершинах пентахоронов, в итоге получим четыре системы уравнений

$$\begin{cases} a_i + b_i \cdot x_i + c_i \cdot y_i + d_i \cdot z_i = 1 \\ a_i + b_i \cdot x_{i+1} + c_i \cdot y_{i+1} + d_i \cdot z_{i+1} = 0 \\ a_i + b_i \cdot x_{i+2} + c_i \cdot y_{i+2} + d_i \cdot z_{i+2} = 0 \\ a_i + b_i \cdot x_{i+3} + c_i \cdot y_{i+3} + d_i \cdot z_{i+3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_i + c_{i+1} \cdot y_i + d_{i+1} \cdot z_i = 0 \\ a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_{i+1} + c_{i+1} \cdot y_{i+1} + d_{i+1} \cdot z_{i+1} = 1 \\ a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_{i+2} + c_{i+1} \cdot y_{i+2} + d_{i+1} \cdot z_{i+2} = 0 \\ a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x_{i+3} + c_{i+1} \cdot y_{i+3} + d_{i+1} \cdot z_{i+3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_i + c_{i+2} \cdot y_i + d_{i+2} \cdot z_i = 0 \\ a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_{i+1} + c_{i+2} \cdot y_{i+1} + d_{i+2} \cdot z_{i+1} = 0 \\ a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_{i+2} + c_{i+2} \cdot y_{i+2} + d_{i+2} \cdot z_{i+2} = 1 \\ a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x_{i+3} + c_{i+2} \cdot y_{i+3} + d_{i+2} \cdot z_{i+3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+3} + b_{i+3} \cdot x_i + c_{i+3} \cdot y_i + d_{i+3} \cdot z_i = 0 \\ a_{i+3} + b_{i+3} \cdot x_{i+1} + c_{i+3} \cdot y_{i+1} + d_{i+3} \cdot z_{i+1} = 0 \\ a_{i+3} + b_{i+3} \cdot x_{i+2} + c_{i+3} \cdot y_{i+2} + d_{i+3} \cdot z_{i+2} = 0 \\ a_{i+3} + b_{i+3} \cdot x_{i+3} + c_{i+3} \cdot y_{i+3} + d_{i+3} \cdot z_{i+3} = 1 \end{cases} \tag{5.11}$$

Решение уравнений будет соответственно

$$\begin{cases} a_i = (-x_{i+1} \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+3} + x_{i+1} \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+2} + x_{i+2} \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+3} - x_{i+2} \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+1} \\ -x_{i+3} \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+2} + x_{i+3} \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+1})/\det \\ b_i = (y_{i+1} z_{i+2} - y_{i+2} z_{i+1} + y_{i+2} z_{i+3} + y_{i+3} z_{i+1} - y_{i+3} z_{i+2})/\det \\ c_i = (-x_{i+1} z_{i+2} + x_{i+1} z_{i+3} + x_{i+2} z_{i+1} - x_{i+2} z_{i+3} - x_{i+3} z_{i+1} + x_{i+3} z_{i+2})/\det \\ d_i = (x_{i+1} y_{i+2} - x_{i+1} y_{i+3} - x_{i+2} y_{i+1} + x_{i+2} y_{i+3} + x_{i+3} y_{i+1} - x_{i+3} y_{i+2})/\det \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+1} = (x_i \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+3} - x_i \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+2} - x_{i+2} \cdot y_i \cdot z_{i+3} + x_{i+2} \cdot y_{i+3} \cdot z_i \\ +x_{i+3} \cdot y_i \cdot z_{i+2} - x_{i+3} \cdot y_{i+2} \cdot z_i)/\det \\ b_{i+1} = (-y_i z_{i+2} + y_i z_{i+3} + y_{i+2} z_i - y_{i+2} z_{i+3} - y_{i+3} z_i + y_{i+3} z_{i+2})/\det \\ c_{i+1} = (x_i z_{i+2} - x_i z_{i+3} - x_{i+2} z_i + x_{i+2} z_{i+3} + x_{i+3} z_i - x_{i+3} z_{i+2})/\det \\ d_{i+1} = (-x_i y_{i+2} + x_i y_{i+3} + x_{i+2} y_i - x_{i+2} y_{i+3} - x_{i+3} y_i + x_{i+3} y_{i+2})/\det \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+2} = (-x_i \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+3} + x_i \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+1} + x_{i+1} \cdot y_i \cdot z_{i+3} - x_{i+1} \cdot y_{i+3} \cdot z_i \\ -x_{i+3} \cdot y_i \cdot z_{i+1} + x_{i+3} \cdot y_{i+1} \cdot z_i)/\det \\ b_{i+2} = (y_i z_{i+1} - y_i z_{i+3} - y_{i+1} z_i + y_{i+1} z_{i+3} + y_{i+3} z_i - y_{i+3} z_{i+1})/\det \\ c_{i+2} = (-x_i z_{i+1} + x_i z_{i+3} + x_{i+1} z_i - x_{i+1} z_{i+3} - x_{i+3} z_i + x_{i+3} z_{i+1})/\det \\ d_{i+2} = (x_i y_{i+1} - x_i y_{i+3} - x_{i+1} y_i + x_{i+1} y_{i+3} + x_{i+3} y_i - x_{i+3} y_{i+1})/\det \end{cases} \quad \begin{cases} a_{i+3} = (x_i \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+2} - x_i \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i \cdot z_{i+2} + x_{i+1} \cdot y_{i+2} \cdot z_i \\ +x_{i+2} \cdot y_i \cdot z_{i+1} - x_{i+2} \cdot y_{i+1} \cdot z_i)/\det \\ b_{i+3} = (-y_i z_{i+1} + y_i z_{i+2} + y_{i+1} z_i - y_{i+1} z_{i+2} - y_{i+2} z_i + y_{i+2} z_{i+1})/\det \\ c_{i+3} = (x_i z_{i+1} - x_i z_{i+2} - x_{i+1} z_i + x_{i+1} z_{i+2} + x_{i+2} z_i - x_{i+2} z_{i+1})/\det \\ d_{i+3} = (-x_i y_{i+1} + x_i y_{i+2} + x_{i+1} y_i - x_{i+1} y_{i+2} - x_{i+2} y_i + x_{i+2} y_{i+1})/\det \end{cases} \tag{5.12}$$

где определитель матрицы:

$$\begin{aligned} \det = {} & x_i \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+2} - x_i \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+3} - x_i \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+1} \\ & + x_i \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+3} + x_i \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+1} - x_i \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+2} \\ & - x_{i+1} \cdot y_i \cdot z_{i+2} + x_{i+1} \cdot y_i \cdot z_{i+3} + x_{i+1} \cdot y_{i+2} \cdot z_i \\ & - x_{i+1} \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+3} - x_{i+1} \cdot y_{i+3} \cdot z_i \\ & + x_{i+1} \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+2} + x_{i+2} \cdot y_i \cdot z_{i+1} - x_{i+2} \cdot y_i \cdot z_{i+3} \\ & - x_{i+2} \cdot y_{i+1} \cdot z_i + x_{i+2} \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+3} + x_{i+2} \cdot y_{i+3} \cdot z_i \\ & - x_{i+2} \cdot y_{i+3} \cdot z_{i+1} - x_{i+3} \cdot y_i \cdot z_{i+1} + x_{i+3} \cdot y_i \cdot z_{i+2} \\ & + x_{i+3} \cdot y_{i+1} \cdot z_i - x_{i+3} \cdot y_{i+1} \cdot z_{i+2} - x_{i+3} \cdot y_{i+2} \cdot z_i \\ & + x_{i+3} \cdot y_{i+2} \cdot z_{i+1} \end{aligned}$$

Глава 6

Вычисление матриц

Матрица жёсткости 1D

Вычислим матрицу жёсткости для одномерного случая. В одномерном пространстве градиент имеет вид $\nabla \upsilon = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$, а скалярное произведение градиента с самим собой равно $\nabla \upsilon \cdot \nabla \upsilon = \left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2$. Учитывая, что одномерная расчётная область M разбита на симплексы-отрезки, исследуемую часть функционала для одного отрезка (x_i, x_{i+1}) можно записать как

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{6.1}$$

В общем случае пробная функция $\upsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i(x)$, тогда как на симплексе она имеет вид $\upsilon_{(i)(i+1)}(x) = q_i \cdot \phi_i(x) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x)$. Примем во внимание (5.7) и (5.8) из раздела о функциях «крышек» и запишем соотношения для функций «крышек»

$$\begin{cases} \phi_i(x) = a_i + b_i \cdot x \\ \phi_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x \end{cases} \tag{6.2}$$

Вычислим производную пробной функции

$$\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+1)}(x)}{\partial x} = q_i \cdot b_i + q_{i+1} \cdot b_{i+1} \tag{6.3}$$

Заметим, что производная не зависит от x и является константой на отрезке. Подставим (6.3) в (6.1)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+1)}}{\partial x}\right)^2 dx = l_{(i)(i+1)} \cdot (q_i \cdot b_i + q_{i+1} \cdot b_{i+1})^2,$$

где $l_{(i)(i+1)} = x_{i+1} - x_i$ — длина отрезка.

Раскроем квадрат и перегруппируем члены

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+1)}}{\partial x}\right)^2 dx = l_{(i)(i+1)} \cdot \left[q_i^2 \cdot b_i^2 + q_{i+1}^2 \cdot b_{i+1}^2 + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+1} \cdot b_i \cdot b_{i+1}\right].$$

Примем во внимание формулы из (5.8) для коэффициентов b и введём обозначения для элементов локальной матрицы жёсткости отрезка

$$
\begin{aligned}
k_{(i)(i)} &= l_{(i)(i+1)} \cdot b_i^2 = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \\
k_{(i+1)(i+1)} &= l_{(i)(i+1)} \cdot b_{i+1}^2 = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \\
k_{(i)(i+1)} &= k_{(i+1)(i)} = l_{(i)(i+1)} \cdot b_i \cdot b_{i+1} = -\frac{1}{x_{i+1} - x_i}
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Таким образом, локальная матрица жёсткости для одномерного элемента имеет вид

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{(i)(i)} & k_{(i)(i+1)} \\ k_{(i+1)(i)} & k_{(i+1)(i+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.5}
$$

Глобальная матрица жёсткости $\mathbf{K}$ получается путём суммирования вкладов от всех отрезков сетки методом сборки: элементы локальных матриц добавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобальной матрицы жёсткости равна $N \times N$, где N — общее количество узлов сетки.

Например, рассмотрим сетку с узлами $0, 1, \ldots, i, i+1, \ldots, N$. При сборке каждый отрезок $(j)(j+1)$ вносит вклад $\pm\frac{1}{l_{(j)(j+1)}}$, причём внутренний узел i получает вклад сразу от двух смежных отрезков — $(i-1)(i)$ и $(i)(i+1)$, — поэтому на главной диагонали стоит сумма $\frac{1}{l_{(i-1)(i)}} + \frac{1}{l_{(i)(i+1)}}$. Поскольку длина $l_{(j)(j+1)}$ зависит от номера отрезка, её нельзя вынести как общий множитель — каждый элемент глобальной матрицы хранит длину своего отрезка. В результате матрица получается трёхдиагональной

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{l_{(0)(1)}} & -\frac{1}{l_{(0)(1)}} & 0 & \cdots & & & 0 \\
-\frac{1}{l_{(0)(1)}} & \frac{1}{l_{(0)(1)}} + \frac{1}{l_{(1)(2)}} & -\frac{1}{l_{(1)(2)}} & & & & \\
0 & -\frac{1}{l_{(1)(2)}} & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & \ddots & \frac{1}{l_{(i-1)(i)}} + \frac{1}{l_{(i)(i+1)}} & -\frac{1}{l_{(i)(i+1)}} & & \vdots \\
 & & & -\frac{1}{l_{(i)(i+1)}} & \frac{1}{l_{(i)(i+1)}} + \frac{1}{l_{(i+1)(i+2)}} & \ddots & \\
 & & & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{l_{(N-1)(N)}} \\
0 & & & \cdots & & -\frac{1}{l_{(N-1)(N)}} & \frac{1}{l_{(N-1)(N)}}
\end{bmatrix}.
$$

Матрица жёсткости 2D

Теперь вычислим матрицу жёсткости для двумерного случая. В двумерном пространстве градиент имеет вид $\nabla \upsilon = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}, \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)$, а скалярное произведение градиента с самим собой равно $\nabla \upsilon \cdot \nabla \upsilon = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2$. Учитывая, что двумерная расчётная область M разбита на симплексы-треугольники, исследуемую часть функционала для одного треугольника с вершинами $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$ можно записать как

$$\int_{\triangle} \left[\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \right)^2 \right] dS. \tag{6.6}$$

Функция $\upsilon(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i(x,y)$. Пробная функция на треугольнике имеет вид $\upsilon_{(i)(i+2)}(x,y) = q_i \cdot \phi_i(x,y) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x,y) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x,y)$. Примем во внимание (5.9) и (5.10) из раздела о функциях «крышек» и запишем соотношения для функций «крышек»

$$\begin{cases} \phi_i(x,y) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y \\ \phi_{i+1}(x,y) = a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x + c_{i+1} \cdot y \\ \phi_{i+2}(x,y) = a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x + c_{i+2} \cdot y \end{cases} \tag{6.7}$$

Вычислим частные производные пробной функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon_{(i)(i+2)}(x,y)}{\partial x} = q_i \cdot b_i + q_{i+1} \cdot b_{i+1} + q_{i+2} \cdot b_{i+2} \\ \dfrac{\partial \upsilon_{(i)(i+2)}(x,y)}{\partial y} = q_i \cdot c_i + q_{i+1} \cdot c_{i+1} + q_{i+2} \cdot c_{i+2} \end{cases} \tag{6.8}$$

Заметим, что производные не зависят от x и y и являются константами на треугольнике. Подставим (6.8) в (6.6)

$$\int_{\triangle} \left[\left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+2)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+2)}}{\partial y} \right)^2 \right] dS = \quad S_{\triangle} \cdot \left[(q_i \cdot b_i + q_{i+1} \cdot b_{i+1} + q_{i+2} \cdot b_{i+2})^2 + (q_i \cdot c_i + q_{i+1} \cdot c_{i+1} + q_{i+2} \cdot c_{i+2})^2 \right],$$

где $S_{\triangle}$ — площадь треугольника, которая вычисляется по формуле

$$S_{\triangle} = \frac{|d|}{2}, \tag{6.9}$$

где $d = x_i \cdot y_{i+1} - x_i \cdot y_{i+2} - x_{i+1} \cdot y_i + x_{i+1} \cdot y_{i+2} + x_{i+2} \cdot y_i - x_{i+2} \cdot y_{i+1}$ — определитель из (5.10).

Раскроем квадраты и перегруппируем члены

$$\begin{aligned} \int_{\triangle} (\nabla \upsilon_{(i)(i+2)})^2 \, dS = S_{\triangle} \cdot \Big[& q_i^2 \cdot [b_i^2 + c_i^2] \\ & + q_{i+1}^2 \cdot [b_{i+1}^2 + c_{i+1}^2] + q_{i+2}^2 \cdot [b_{i+2}^2 + c_{i+2}^2] \\ & + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+1} \cdot (b_i \cdot b_{i+1} + c_i \cdot c_{i+1}) \\ & + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+2} \cdot (b_i \cdot b_{i+2} + c_i \cdot c_{i+2}) \\ & + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+2} \cdot (b_{i+1} \cdot b_{i+2} + c_{i+1} \cdot c_{i+2}) \Big] \end{aligned}$$

Примем во внимание формулы из (5.10) для коэффициентов b и c и введём обозначения для элементов локальной матрицы жёсткости треугольника

$$
\begin{aligned}
k_{(i)(i)} &= S_\triangle \cdot [b_i^2 + c_i^2] = \frac{1}{2 \cdot |d|} \cdot [(y_{i+1} - y_{i+2})^2 + (-x_{i+1} + x_{i+2})^2] \\
k_{(i+1)(i+1)} &= S_\triangle \cdot [b_{i+1}^2 + c_{i+1}^2] = \frac{1}{2 \cdot |d|} \cdot [(-y_i + y_{i+2})^2 + (x_i - x_{i+2})^2] \\
k_{(i+2)(i+2)} &= S_\triangle \cdot [b_{i+2}^2 + c_{i+2}^2] = \frac{1}{2 \cdot |d|} \cdot [(y_i - y_{i+1})^2 + (-x_i + x_{i+1})^2] \\
k_{(i)(i+1)} &= k_{(i+1)(i)} = S_\triangle \cdot (b_i \cdot b_{i+1} + c_i \cdot c_{i+1}) \\
&= \frac{1}{2 \cdot |d|} \cdot [(y_{i+1} - y_{i+2}) \cdot (-y_i + y_{i+2}) + (-x_{i+1} + x_{i+2}) \cdot (x_i - x_{i+2})] \\
k_{(i)(i+2)} &= k_{(i+2)(i)} = S_\triangle \cdot (b_i \cdot b_{i+2} + c_i \cdot c_{i+2}) \\
&= \frac{1}{2 \cdot |d|} \cdot [(y_{i+1} - y_{i+2}) \cdot (y_i - y_{i+1}) + (-x_{i+1} + x_{i+2}) \cdot (-x_i + x_{i+1})] \\
k_{(i+1)(i+2)} &= k_{(i+2)(i+1)} = S_\triangle \cdot (b_{i+1} \cdot b_{i+2} + c_{i+1} \cdot c_{i+2}) \\
&= \frac{1}{2 \cdot |d|} \cdot [(-y_i + y_{i+2}) \cdot (y_i - y_{i+1}) + (x_i - x_{i+2}) \cdot (-x_i + x_{i+1})]
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Таким образом, локальная матрица жёсткости для треугольного элемента имеет вид

$$
\mathbf{K}_\triangle = \begin{bmatrix} k_{(i)(i)} & k_{(i)(i+1)} & k_{(i)(i+2)} \\ k_{(i+1)(i)} & k_{(i+1)(i+1)} & k_{(i+1)(i+2)} \\ k_{(i+2)(i)} & k_{(i+2)(i+1)} & k_{(i+2)(i+2)} \end{bmatrix} = S_\triangle \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i \cdot b_{i+1} + c_i \cdot c_{i+1} & b_i \cdot b_{i+2} + c_i \cdot c_{i+2} \\ b_{i+1} \cdot b_i + c_{i+1} \cdot c_i & b_{i+1}^2 + c_{i+1}^2 & b_{i+1} \cdot b_{i+2} + c_{i+1} \cdot c_{i+2} \\ b_{i+2} \cdot b_i + c_{i+2} \cdot c_i & b_{i+2} \cdot b_{i+1} + c_{i+2} \cdot c_{i+1} & b_{i+2}^2 + c_{i+2}^2 \end{bmatrix}. \tag{6.11}
$$

Глобальная матрица жёсткости $\mathbf{K}$ получается путём суммирования вкладов от всех треугольных элементов сетки методом сборки: элементы локальных матриц добавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобальной матрицы жёсткости равна $N \times N$, где N — общее количество узлов сетки.

Матрица жёсткости 3D

Перейдём к вычислению матрицы жёсткости для трёхмерного случая. В трёхмерном пространстве градиент имеет вид $\nabla \upsilon = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}, \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)$, а скалярное произведение градиента с самим собой равно $\nabla \upsilon \cdot \nabla \upsilon = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)^2$. Учитывая, что трёхмерная расчётная область M разбита на симплексы-тетраэдры, исследуемую часть функционала для одного тетраэдра с вершинами

$$
(x_i, y_i, z_i), \quad (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}), \quad (x_{i+2}, y_{i+2}, z_{i+2}), \quad (x_{i+3}, y_{i+3}, z_{i+3})
$$

можно записать как

$$
\int_{\text{тет}} \left[\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)^2 \right] dV. \tag{6.12}
$$

Функция $\upsilon(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i(x,y,z)$. Пробная функция на тетраэдре имеет вид $\upsilon_{(i)(i+3)}(x,y,z) = q_i \cdot \phi_i(x,y,z) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x,y,z) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x,y,z) + q_{i+3} \cdot \phi_{i+3}(x,y,z)$. Аналогично двумерному случаю, функции «крышек» для тетраэдра имеют линейный вид

$$\begin{cases} \phi_i(x,y,z) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y + d_i \cdot z \\ \phi_{i+1}(x,y,z) = a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x + c_{i+1} \cdot y + d_{i+1} \cdot z \\ \phi_{i+2}(x,y,z) = a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x + c_{i+2} \cdot y + d_{i+2} \cdot z \\ \phi_{i+3}(x,y,z) = a_{i+3} + b_{i+3} \cdot x + c_{i+3} \cdot y + d_{i+3} \cdot z \end{cases} \tag{6.13}$$

Вычислим частные производные пробной функции

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon_{(i)(i+3)}(x,y,z)}{\partial x} = q_i \cdot b_i + q_{i+1} \cdot b_{i+1} + q_{i+2} \cdot b_{i+2} + q_{i+3} \cdot b_{i+3} \\ \dfrac{\partial \upsilon_{(i)(i+3)}(x,y,z)}{\partial y} = q_i \cdot c_i + q_{i+1} \cdot c_{i+1} + q_{i+2} \cdot c_{i+2} + q_{i+3} \cdot c_{i+3} \\ \dfrac{\partial \upsilon_{(i)(i+3)}(x,y,z)}{\partial z} = q_i \cdot d_i + q_{i+1} \cdot d_{i+1} + q_{i+2} \cdot d_{i+2} + q_{i+3} \cdot d_{i+3} \end{cases} \tag{6.14}$$

Заметим, что производные не зависят от x, y и z и являются константами на тетраэдре. Подставим (6.14) в (6.12)

$$\begin{aligned} \int_{\text{тет}} \left[\left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+3)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+3)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_{(i)(i+3)}}{\partial z} \right)^2 \right] dV \\ = \quad V_{\text{тет}} \cdot \Big[(q_i \cdot b_i + q_{i+1} \cdot b_{i+1} + q_{i+2} \cdot b_{i+2} \\ + q_{i+3} \cdot b_{i+3})^2 \\ + (q_i \cdot c_i + q_{i+1} \cdot c_{i+1} + q_{i+2} \cdot c_{i+2} + q_{i+3} \cdot c_{i+3})^2 \\ + (q_i \cdot d_i + q_{i+1} \cdot d_{i+1} + q_{i+2} \cdot d_{i+2} + q_{i+3} \cdot d_{i+3})^2 \Big], \end{aligned}$$

где $V_{\text{тет}}$ — объём тетраэдра, который вычисляется по формуле

$$V_{\text{тет}} = \frac{|\Delta|}{6}, \tag{6.15}$$

где Δ — определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} & 1 \\ x_{i+2} & y_{i+2} & z_{i+2} & 1 \\ x_{i+3} & y_{i+3} & z_{i+3} & 1 \end{vmatrix}. \tag{6.16}$$

Раскроем квадраты и перегруппируем члены

$$\int_{\text{тет}} (\nabla \upsilon_{(i)(i+3)})^2 \, dV = V_{\text{тет}} \cdot \Big[q_i^2 \cdot [b_i^2 + c_i^2 + d_i^2] + q_{i+1}^2 \cdot [b_{i+1}^2 + c_{i+1}^2 + d_{i+1}^2] + q_{i+2}^2 \cdot [b_{i+2}^2 + c_{i+2}^2 + d_{i+2}^2] + q_{i+3}^2 \cdot [b_{i+3}^2 + c_{i+3}^2 + d_{i+3}^2] + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+1} \cdot (b_i \cdot b_{i+1} + c_i \cdot c_{i+1} + d_i \cdot d_{i+1}) + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+2} \cdot (b_i \cdot b_{i+2} + c_i \cdot c_{i+2} + d_i \cdot d_{i+2}) + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+3} \cdot (b_i \cdot b_{i+3} + c_i \cdot c_{i+3} + d_i \cdot d_{i+3}) + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+2} \cdot (b_{i+1} \cdot b_{i+2} + c_{i+1} \cdot c_{i+2} + d_{i+1} \cdot d_{i+2}) + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+3} \cdot (b_{i+1} \cdot b_{i+3} + c_{i+1} \cdot c_{i+3} + d_{i+1} \cdot d_{i+3}) + 2 \cdot q_{i+2} \cdot q_{i+3} \cdot (b_{i+2} \cdot b_{i+3} + c_{i+2} \cdot c_{i+3} + d_{i+2} \cdot d_{i+3}) \Big]$$

Коэффициенты b_k, c_k и d_k для каждой вершины k тетраэдра вычисляются через миноры определителя Δ. Для вершины с индексом k коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} b_k &= (-1)^{k+1} \cdot \frac{\Delta_k^{(x)}}{\Delta} \\ c_k &= (-1)^{k+2} \cdot \frac{\Delta_k^{(y)}}{\Delta} \\ d_k &= (-1)^{k+3} \cdot \frac{\Delta_k^{(z)}}{\Delta} \end{aligned} \tag{6.17}$$

где $\Delta_k^{(x)}$, $\Delta_k^{(y)}$ и $\Delta_k^{(z)}$ — миноры, получаемые вычёркиванием k-й строки и соответствующего столбца (x, y или z) из матрицы (6.16).

Введём обозначения для элементов локальной матрицы жёсткости тетраэдра

$$k_{mn} = V_{\text{тет}} \cdot (b_m \cdot b_n + c_m \cdot c_n + d_m \cdot d_n), \quad m, n \in \{i, i+1, i+2, i+3\}. \tag{6.18}$$

Таким образом, локальная матрица жёсткости для тетраэдрального элемента имеет вид

$$\mathbf{K}_{\text{тет}} = \begin{bmatrix} k_{(i)(i)} & k_{(i)(i+1)} & k_{(i)(i+2)} & k_{(i)(i+3)} \\ k_{(i+1)(i)} & k_{(i+1)(i+1)} & k_{(i+1)(i+2)} & k_{(i+1)(i+3)} \\ k_{(i+2)(i)} & k_{(i+2)(i+1)} & k_{(i+2)(i+2)} & k_{(i+2)(i+3)} \\ k_{(i+3)(i)} & k_{(i+3)(i+1)} & k_{(i+3)(i+2)} & k_{(i+3)(i+3)} \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Локальная матрица жёсткости является симметричной, то есть $k_{mn}^{\text{лок}} = k_{nm}^{\text{лок}}$. Глобальная матрица жёсткости $\mathbf{K}$ получается путём суммирования вкладов от всех тетраэдральных элементов сетки методом сборки: элементы локальных матриц добавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобальной матрицы жёсткости равна $N \times N$, где N — общее количество узлов сетки.

Матрица демпфирования 1D

Теперь вычислим матрицу демпфирования для одномерного случая. Матрица демпфирования связана с интегралом квадрата пробной функции. Рассмотрим интеграл для одного отрезка с вершинами x_i, x_{i+1}

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon^2 \, dx. \tag{6.20}$$

Пробная функция на отрезке имеет вид $\upsilon_{(i)(i+1)}(x) = q_i \cdot \phi_i(x) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x)$. Примем во внимание (5.7) и (5.8) из раздела о функциях «крышек» и запишем соотношения для функций «крышек»

$$\begin{cases} \phi_i(x) = a_i + b_i \cdot x \\ \phi_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x \end{cases} \tag{6.21}$$

Подставим пробную функцию в (6.20)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon_{(i)(i+1)}^2 \, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[q_i \cdot (a_i + b_i \cdot x) + q_{i+1} \cdot (a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x) \right]^2 \, dx.$$

Учитывая (5.8), можно записать

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon_{(i)(i+1)}^2 \, dx = \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[(-q_i \cdot x_{i+1} + q_{i+1} \cdot x_i) + (q_i - q_{i+1}) \cdot x \right]^2 \, dx.$$

Раскроем квадрат и разделим интеграл на три части

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon_{(i)(i+1)}^2 \, dx &= \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} \cdot \Bigg[\int_{x_i}^{x_{i+1}} (-q_i \cdot x_{i+1} + q_{i+1} \cdot x_i)^2 \, dx \\ &+ 2 \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-q_i \cdot x_{i+1} + q_{i+1} \cdot x_i) \cdot (q_i - q_{i+1}) \cdot x \, dx \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (q_i - q_{i+1})^2 \cdot x^2 \, dx \Bigg] \end{aligned}$$

Вычислим каждый из трёх интегралов

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon_{(i)(i+1)}^2 \, dx = &\frac{(-q_i \cdot x_{i+1} + q_{i+1} \cdot x_i)^2 \cdot x}{(x_i - x_{i+1})^2} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &+ \frac{(-q_i \cdot x_{i+1} + q_{i+1} \cdot x_i) \cdot (q_i - q_{i+1}) \cdot x^2}{(x_i - x_{i+1})^2} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &+ \frac{(q_i - q_{i+1})^2 \cdot x^3}{3 \cdot (x_i - x_{i+1})^2} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}. \end{aligned}$$

После упрощения получаем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon_{(i)(i+1)}^2\, dx = -\frac{(q_i^2 + q_i \cdot q_{i+1} + q_{i+1}^2) \cdot (x_i - x_{i+1})^2}{3 \cdot (x_i - x_{i+1})} = \frac{x_{i+1} - x_i}{3} \cdot (q_i^2 + q_i \cdot q_{i+1} + q_{i+1}^2).$$

Введём обозначение длины отрезка

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \upsilon_{(i)(i+1)}^2\, dx = \frac{l_{(i)(i+1)}}{3} \cdot \left[q_i^2 + q_i \cdot q_{i+1} + q_{i+1}^2\right],$$

где $l_{(i)(i+1)} = x_{i+1} - x_i$ — длина отрезка.

Введём обозначения для элементов локальной матрицы демпфирования отрезка

$$\begin{aligned} c_{(i)(i)} &= \frac{l_{(i)(i+1)}}{3} \\ c_{(i+1)(i+1)} &= \frac{l_{(i)(i+1)}}{3} \\ c_{(i)(i+1)} &= c_{(i+1)(i)} = \frac{l_{(i)(i+1)}}{6} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Таким образом, локальная матрица демпфирования для одномерного элемента имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{(i)(i)} & c_{(i)(i+1)} \\ c_{(i+1)(i)} & c_{(i+1)(i+1)} \end{bmatrix} = \frac{l_{(i)(i+1)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Глобальная матрица демпфирования $\mathbf{C}$ получается путём суммирования вкладов от всех отрезков сетки методом сборки: элементы локальных матриц добавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобальной матрицы демпфирования равна $N \times N$, где N — общее количество узлов сетки.

Например, рассмотрим сетку с узлами $0, 1, \ldots, i, i+1, \ldots, N$. При сборке каждый отрезок $(j)(j+1)$ добавляет на диагональ вклад $\frac{l_{(j)(j+1)}}{3}$, а на смежные внедиагональные элементы — $\frac{l_{(j)(j+1)}}{6}$; внутренний узел i получает диагональный вклад сразу от двух смежных отрезков — $(i-1)(i)$ и $(i)(i+1)$, — поэтому на главной диагонали стоит сумма $\frac{l_{(i-1)(i)}}{3} + \frac{l_{(i)(i+1)}}{3}$. Поскольку длина $l_{(j)(j+1)}$ зависит от номера отрезка, её нельзя вынести как общий множитель — каждый элемент глобальной матрицы хранит длину своего отрезка. В результате матрица получается трёхдиагональной

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{l_{(0)(1)}}{3} & \frac{l_{(0)(1)}}{6} & 0 & \cdots & & & 0 \\ \frac{l_{(0)(1)}}{6} & \frac{l_{(0)(1)}}{3} + \frac{l_{(1)(2)}}{3} & \frac{l_{(1)(2)}}{6} & & & & \\ 0 & \frac{l_{(1)(2)}}{6} & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & \frac{l_{(i-1)(i)}}{3} + \frac{l_{(i)(i+1)}}{3} & \frac{l_{(i)(i+1)}}{6} & & \vdots \\ & & & \frac{l_{(i)(i+1)}}{6} & \frac{l_{(i)(i+1)}}{3} + \frac{l_{(i+1)(i+2)}}{3} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \frac{l_{(N-1)(N)}}{6} \\ 0 & & & \cdots & & \frac{l_{(N-1)(N)}}{6} & \frac{l_{(N-1)(N)}}{3} \end{bmatrix}.$$

Матрица демпфирования 2D

Теперь вычислим матрицу демпфирования для двумерного случая. Матрица демпфирования связана с интегралом квадрата пробной функции. Рассмотрим интеграл для одного треугольника с вершинами $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$

$$\int_{\triangle} v^2 \, dS. \tag{6.24}$$

Пробная функция на треугольнике имеет вид $v_{(i)(i+2)}(x, y) = q_i \cdot \phi_i(x, y) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x, y) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x, y)$. Примем во внимание (5.9) и (5.10) из раздела о функциях «крышек» и запишем соотношения для функций «крышек»

$$\begin{cases} \phi_i(x, y) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y \\ \phi_{i+1}(x, y) = a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x + c_{i+1} \cdot y \\ \phi_{i+2}(x, y) = a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x + c_{i+2} \cdot y \end{cases} \tag{6.25}$$

Подставим пробную функцию в (6.24)

$$\int_{\triangle} v^2_{(i)(i+2)} \, dS = \int_{\triangle} \Big[q_i \cdot (a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y) + q_{i+1} \cdot (a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x + c_{i+1} \cdot y) + q_{i+2} \cdot (a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x + c_{i+2} \cdot y) \Big]^2 \, dS$$

Раскроем квадрат. Для упрощения вычислений воспользуемся тем, что для линейных функций «крышек» на треугольнике справедливы следующие соотношения

$$\int_{\triangle} \phi_m \cdot \phi_n \, dS = \begin{cases} \frac{S_{\triangle}}{6}, & m = n \\ \frac{S_{\triangle}}{12}, & m \neq n \end{cases} \tag{6.26}$$

где $S_{\triangle}$ — площадь треугольника, которая вычисляется по формуле (6.9).

Используя эти соотношения и раскрывая квадрат пробной функции, получим

$$\int_{\triangle} v^2_{(i)(i+2)}\,dS = \int_{\triangle} \Big[q_i^2\cdot\phi_i^2 + q_{i+1}^2\cdot\phi_{i+1}^2 + q_{i+2}^2\cdot\phi_{i+2}^2 + 2\cdot q_i\cdot q_{i+1}\cdot\phi_i\cdot\phi_{i+1} + 2\cdot q_i\cdot q_{i+2}\cdot\phi_i\cdot\phi_{i+2} + 2\cdot q_{i+1}\cdot q_{i+2}\cdot\phi_{i+1}\cdot\phi_{i+2}\Big]\,dS$$

Применим формулы (6.26)

$$\int_{\triangle} v^2_{(i)(i+2)}\,dS = q_i^2\cdot\frac{S_\triangle}{6} + q_{i+1}^2\cdot\frac{S_\triangle}{6} + q_{i+2}^2\cdot\frac{S_\triangle}{6} + 2\cdot q_i\cdot q_{i+1}\cdot\frac{S_\triangle}{12} + 2\cdot q_i\cdot q_{i+2}\cdot\frac{S_\triangle}{12} + 2\cdot q_{i+1}\cdot q_{i+2}\cdot\frac{S_\triangle}{12}$$

Упростим выражение

$$\int_{\triangle} v^2_{(i)(i+2)}\,dS = \frac{S_\triangle}{12}\left[2q_i^2 + 2q_{i+1}^2 + 2q_{i+2}^2 + 2q_iq_{i+1} + 2q_iq_{i+2} + 2q_{i+1}q_{i+2}\right].$$

Введём обозначения для элементов локальной матрицы демпфирования треугольника

$$\begin{aligned}
c_{(i)(i)} &= \frac{S_\triangle}{6}\\
c_{(i+1)(i+1)} &= \frac{S_\triangle}{6}\\
c_{(i+2)(i+2)} &= \frac{S_\triangle}{6}\\
c_{(i)(i+1)} &= c_{(i+1)(i)} = \frac{S_\triangle}{12}\\
c_{(i)(i+2)} &= c_{(i+2)(i)} = \frac{S_\triangle}{12}\\
c_{(i+1)(i+2)} &= c_{(i+2)(i+1)} = \frac{S_\triangle}{12}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Таким образом, локальная матрица демпфирования для треугольного элемента имеет вид

$$\mathbf{C}_\triangle = \begin{bmatrix} c_{(i)(i)} & c_{(i)(i+1)} & c_{(i)(i+2)}\\ c_{(i+1)(i)} & c_{(i+1)(i+1)} & c_{(i+1)(i+2)}\\ c_{(i+2)(i)} & c_{(i+2)(i+1)} & c_{(i+2)(i+2)}\end{bmatrix} = \frac{S_\triangle}{12}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

Глобальная матрица демпфирования $\mathbf{C}$ получается путём суммирования вкладов от всех треугольных элементов сетки методом сборки: элементы локальных матриц добавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобальной матрицы демпфирования равна $N \times N$, где N — общее количество узлов сетки.

Матрица демпфирования 3D

Перейдём к вычислению матрицы демпфирования для трёхмерного случая. Матрица демпфирования связана с интегралом квадрата пробной функции. Рассмотрим интеграл для одного тетраэдра с вершинами

$$(x_i, y_i, z_i), \quad (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}), \quad (x_{i+2}, y_{i+2}, z_{i+2}), \quad (x_{i+3}, y_{i+3}, z_{i+3})$$

$$\int_{\text{тет}} \upsilon^2 \, dV. \tag{6.29}$$

Пробная функция на тетраэдре имеет вид $\upsilon_{(i)(i+3)}(x, y, z) = q_i \cdot \phi_i + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1} + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2} + q_{i+3} \cdot \phi_{i+3}$. Аналогично двумерному случаю, функции «крышек» для тетраэдра имеют линейный вид согласно (6.13)

$$\begin{cases} \phi_i(x, y, z) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y + d_i \cdot z \\ \phi_{i+1}(x, y, z) = a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x + c_{i+1} \cdot y + d_{i+1} \cdot z \\ \phi_{i+2}(x, y, z) = a_{i+2} + b_{i+2} \cdot x + c_{i+2} \cdot y + d_{i+2} \cdot z \\ \phi_{i+3}(x, y, z) = a_{i+3} + b_{i+3} \cdot x + c_{i+3} \cdot y + d_{i+3} \cdot z \end{cases} \tag{6.30}$$

Подставим пробную функцию в (6.29)

$$\int_{\text{тет}} \upsilon^2_{(i)(i+3)} \, dV = \int_{\text{тет}} \Big[q_i \cdot \phi_i(x, y, z) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x, y, z) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x, y, z) + q_{i+3} \cdot \phi_{i+3}(x, y, z) \Big]^2 \, dV$$

Для линейных функций «крышек» на тетраэдре справедливы следующие соотношения

$$\int_{\text{тет}} \phi_m \cdot \phi_n \, dV = \begin{cases} \dfrac{V_{\text{тет}}}{10}, & m = n \\ \dfrac{V_{\text{тет}}}{20}, & m \neq n \end{cases} \tag{6.31}$$

где $V_{\text{тет}}$ — объём тетраэдра, который вычисляется по формуле (6.15).

Раскроем квадрат пробной функции

$$\int_{\text{тет}} \upsilon^2_{(i)(i+3)}\, dV = \int_{\text{тет}} \Big[q_i^2 \cdot \phi_i^2 + q_{i+1}^2 \cdot \phi_{i+1}^2 + q_{i+2}^2 \cdot \phi_{i+2}^2 + q_{i+3}^2 \cdot \phi_{i+3}^2 + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+1} \cdot \phi_i \cdot \phi_{i+1} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+2} \cdot \phi_i \cdot \phi_{i+2} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+3} \cdot \phi_i \cdot \phi_{i+3} + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+2} \cdot \phi_{i+1} \cdot \phi_{i+2} + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+3} \cdot \phi_{i+1} \cdot \phi_{i+3} + 2 \cdot q_{i+2} \cdot q_{i+3} \cdot \phi_{i+2} \cdot \phi_{i+3} \Big]\, dV$$

Применим формулы (6.31)

$$\int_{\text{тет}} \upsilon^2_{(i)(i+3)}\, dV = q_i^2 \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{10} + q_{i+1}^2 \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{10} + q_{i+2}^2 \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{10} + q_{i+3}^2 \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{10} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+1} \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{20} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+2} \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{20} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+3} \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{20} + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+2} \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{20} + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+3} \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{20} + 2 \cdot q_{i+2} \cdot q_{i+3} \cdot \frac{V_{\text{тет}}}{20}$$

Упростим выражение

$$\int_{\text{тет}} \upsilon^2_{(i)(i+3)}\, dV = \frac{V_{\text{тет}}}{20} \cdot \Big[2 \cdot q_i^2 + 2 \cdot q_{i+1}^2 + 2 \cdot q_{i+2}^2 + 2 \cdot q_{i+3}^2 + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+1} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+2} + 2 \cdot q_i \cdot q_{i+3} + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+2} + 2 \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+3} + 2 \cdot q_{i+2} \cdot q_{i+3} \Big]$$

Введём обозначения для элементов локальной матрицы демпфирования тетраэдра

$$\begin{aligned} c_{(i)(i)} &= \frac{V_{\text{тет}}}{10} \\ c_{(i+1)(i+1)} &= \frac{V_{\text{тет}}}{10} \\ c_{(i+2)(i+2)} &= \frac{V_{\text{тет}}}{10} \\ c_{(i+3)(i+3)} &= \frac{V_{\text{тет}}}{10} \\ c_{(m)(n)} = c_{(n)(m)} &= \frac{V_{\text{тет}}}{20}, \quad m \neq n, \quad m, n \in \{i, i+1, i+2, i+3\} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Таким образом, локальная матрица демпфирования для тетраэдрального элемента имеет вид

$$\mathbf{C}_{\text{тет}} = \begin{bmatrix} c_{(i)(i)} & c_{(i)(i+1)} & c_{(i)(i+2)} & c_{(i)(i+3)} \\ c_{(i+1)(i)} & c_{(i+1)(i+1)} & c_{(i+1)(i+2)} & c_{(i+1)(i+3)} \\ c_{(i+2)(i)} & c_{(i+2)(i+1)} & c_{(i+2)(i+2)} & c_{(i+2)(i+3)} \\ c_{(i+3)(i)} & c_{(i+3)(i+1)} & c_{(i+3)(i+2)} & c_{(i+3)(i+3)} \end{bmatrix} = \frac{V_{\text{тет}}}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Локальная матрица демпфирования является симметричной. Глобальная матрица демпфирования $\mathbf{C}$ получается путём суммирования вкладов от всех тетраэдральных элементов сетки методом сборки: элементы локальных матриц добавляются к соответствующим элементам глобальной матрицы согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобальной матрицы демпфирования равна $N \times N$, где N — общее количество узлов сетки.

Вектор нагрузки 1D

Теперь вычислим вектор нагрузки для одномерного случая. Вектор нагрузки связан с интегралом произведения функции источника на пробную функцию. Рассмотрим интеграл для одного отрезка с вершинами x_i, x_{i+1}

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot \upsilon \, dx. \quad (6.34)$$

Пробная функция на отрезке имеет вид $\upsilon(x) = q_i \cdot \phi_i(x) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x)$. Для вычисления интеграла необходимо интерполировать функцию источника $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ линейной функцией. Представим $f(x)$ в виде $\widetilde{f}(x) = e_1 + e_2 \cdot x$. Коэффициенты e_1 и e_2 определяются из условий интерполяции в узлах

$$\begin{cases} e_1 + e_2 \cdot x_i = f_i \\ e_1 + e_2 \cdot x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases} \quad (6.35)$$

Решая эту систему по аналогии с (5.8), получаем

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_i \cdot x_{i+1} - f_{i+1} \cdot x_i}{x_{i+1} - x_i} \\ e_2 = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \end{cases} \quad (6.36)$$

Подставим интерполированную функцию источника и пробную функцию в (6.34). Примем во внимание (5.7) и (5.8) из раздела о функциях «крышек»

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \cdot \upsilon \, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (e_1 + e_2 \cdot x) \cdot [q_i \cdot (a_i + b_i \cdot x) + q_{i+1} \cdot (a_{i+1} + b_{i+1} \cdot x)] \, dx.$$

Раскроем скобки и разделим интеграл на части

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot\upsilon\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big[e_1\cdot(q_i\cdot a_i + q_{i+1}\cdot a_{i+1}) + e_1\cdot(q_i\cdot b_i + q_{i+1}\cdot b_{i+1})\cdot x + e_2\cdot(q_i\cdot a_i + q_{i+1}\cdot a_{i+1})\cdot x + e_2\cdot(q_i\cdot b_i + q_{i+1}\cdot b_{i+1})\cdot x^2\Big]\,dx$$

Вычислим каждый из интегралов

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot\upsilon\,dx = e_1\cdot(q_i\cdot a_i + q_{i+1}\cdot a_{i+1})\cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + [e_1\cdot(q_i\cdot b_i + q_{i+1}\cdot b_{i+1}) + e_2\cdot(q_i\cdot a_i + q_{i+1}\cdot a_{i+1})]\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + e_2\cdot(q_i\cdot b_i + q_{i+1}\cdot b_{i+1})\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Подставляя выражения для e_1, e_2 из (6.36) и используя соотношения (5.8), после упрощения получаем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot\upsilon\,dx = \frac{(f_i+f_{i+1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}{2}\cdot(q_i\cdot a_i + q_{i+1}\cdot a_{i+1}) + \frac{x_{i+1}-x_i}{6}\cdot[f_i\cdot x_i + f_{i+1}\cdot x_{i+1} + (f_i+f_{i+1})\cdot(x_i+x_{i+1})]\cdot(q_i\cdot b_i + q_{i+1}\cdot b_{i+1})$$

Дальнейшие преобразования с учётом (5.8) приводят к окончательному результату

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot\upsilon\,dx = \frac{x_{i+1}-x_i}{6}\cdot[q_i\cdot(2\cdot f_i + f_{i+1}) + q_{i+1}\cdot(f_i + 2\cdot f_{i+1})]\,.$$

Раскроем и перегруппируем члены

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\cdot\upsilon\,dx = l_{(i)(i+1)}\cdot\left[\frac{2\cdot f_i + f_{i+1}}{6}\cdot q_i + \frac{f_i + 2\cdot f_{i+1}}{6}\cdot q_{i+1}\right],$$

где $l_{(i)(i+1)} = x_{i+1} - x_i$ — длина отрезка.
Введём обозначения для элементов локального вектора нагрузки отрезка

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{l_{(i)(i+1)}}{6}\cdot(2\cdot f_i + f_{i+1}) \\ r_{i+1} &= \frac{l_{(i)(i+1)}}{6}\cdot(f_i + 2\cdot f_{i+1}) \end{aligned} \tag{6.37}$$

Таким образом, локальный вектор нагрузки для одномерного элемента имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{l_{(i)(i+1)}}{6}\begin{bmatrix} 2\cdot f_i + f_{i+1} \\ f_i + 2\cdot f_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{6.38}$$

Глобальный вектор нагрузки $\mathbf{R}$ получается путём суммирования вкладов от всех отрезков сетки методом сборки: элементы локальных векторов добавляются к соответствующим элементам глобального вектора согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобального вектора нагрузки равна N, где N — общее количество узлов сетки. Важно отметить, что для внутренних узлов происходит суммирование вкладов от двух смежных элементов, в результате чего элемент глобального вектора нагрузки для внутреннего узла j принимает вид

$$R_j = \frac{l_{(j-1)(j)}}{6} \cdot (f_{j-1} + 2 \cdot f_j) + \frac{l_{(j)(j+1)}}{6} \cdot (2 \cdot f_j + f_{j+1}), \tag{6.39}$$

где $l_{(j-1)(j)} = x_j - x_{j-1}$ и $l_{(j)(j+1)} = x_{j+1} - x_j$ — длины смежных отрезков. Для граничных узлов элементные вклады собираются так же, но при последующем учёте граничных условий соответствующие компоненты системы могут изменяться.

Например, для сетки с узлами $0, 1, \ldots, i, i+1, \ldots, N$ глобальный вектор нагрузки, собранный из локальных вкладов по правилу (6.39) для внутренних узлов, принимает вид (до учёта граничных условий)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{l_{(0)(1)}}{6} \cdot (2 \cdot f_0 + f_1) \\ \frac{l_{(0)(1)}}{6} \cdot (f_0 + 2 \cdot f_1) + \frac{l_{(1)(2)}}{6} \cdot (2 \cdot f_1 + f_2) \\ \vdots \\ \frac{l_{(i-1)(i)}}{6} \cdot (f_{i-1} + 2 \cdot f_i) + \frac{l_{(i)(i+1)}}{6} \cdot (2 \cdot f_i + f_{i+1}) \\ \frac{l_{(i)(i+1)}}{6} \cdot (f_i + 2 \cdot f_{i+1}) + \frac{l_{(i+1)(i+2)}}{6} \cdot (2 \cdot f_{i+1} + f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{l_{(N-1)(N)}}{6} \cdot (f_{N-1} + 2 \cdot f_N) \end{bmatrix}.$$

Вектор нагрузки 2D

Теперь вычислим вектор нагрузки для двумерного случая. Вектор нагрузки связан с интегралом произведения функции источника на пробную функцию. Рассмотрим интеграл для одного треугольника с вершинами $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$

$$\int_{\triangle} f(x, y) \cdot \upsilon \, dS. \tag{6.40}$$

Пробная функция на треугольнике имеет вид $\upsilon_{(i)(i+2)}(x, y) = q_i \cdot \phi_i(x, y) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x, y) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x, y)$. Для вычисления интеграла необходимо интерполировать функцию источника $f(x, y)$ на треугольнике $\triangle$ линейной функцией. Представим $f(x, y)$ в виде $\widetilde{f}(x, y) = e_1 + e_2 \cdot x + e_3 \cdot y$. Коэффициенты e_1, e_2, e_3 определяются из условий интерполяции в узлах

$$\begin{cases} e_1 + e_2 \cdot x_i + e_3 \cdot y_i = f_i \\ e_1 + e_2 \cdot x_{i+1} + e_3 \cdot y_{i+1} = f_{i+1} \\ e_1 + e_2 \cdot x_{i+2} + e_3 \cdot y_{i+2} = f_{i+2} \end{cases} \tag{6.41}$$

Поскольку функции «крышки» ϕ_n равны единице в своём узле и нулю в остальных, линейный интерполянт функции источника, выраженный через них, принимает вид

$$\widetilde{f}(x,y) = f_i \cdot \phi_i(x,y) + f_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x,y) + f_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x,y), \tag{6.42}$$

где f_i, f_{i+1}, f_{i+2} — значения функции источника в вершинах треугольника.

Подставим интерполированную функцию источника и пробную функцию в (6.40). Примем во внимание (6.25) из раздела о функциях «крышек»

$$\int_{\triangle} f(x,y) \cdot \upsilon \, dS = \int_{\triangle} \left(\sum_n f_n \cdot \phi_n \right) \cdot \left(\sum_m q_m \cdot \phi_m \right) dS$$
$$= \sum_m \sum_n q_m \cdot f_n \cdot \int_{\triangle} \phi_m \cdot \phi_n \, dS,$$

где индексы m и n пробегают вершины треугольника $\{i, i+1, i+2\}$.

Воспользуемся соотношениями (6.26) для интегралов произведений функций «крышек», выведенными при вычислении матрицы демпфирования, где $S_{\triangle}$ — площадь треугольника, которая вычисляется по формуле (6.9). После приведения подобных получаем

$$\int_{\triangle} f(x,y) \cdot \upsilon \, dS = \frac{S_{\triangle}}{12} \cdot \Big[q_i \cdot (2 \cdot f_i + f_{i+1} + f_{i+2})$$
$$+ q_{i+1} \cdot (f_i + 2 \cdot f_{i+1} + f_{i+2})$$
$$+ q_{i+2} \cdot (f_i + f_{i+1} + 2 \cdot f_{i+2}) \Big]$$

Введём обозначения для элементов локального вектора нагрузки треугольника

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{S_{\triangle}}{12} \cdot (2 \cdot f_i + f_{i+1} + f_{i+2}) \\ r_{i+1} &= \frac{S_{\triangle}}{12} \cdot (f_i + 2 \cdot f_{i+1} + f_{i+2}) \\ r_{i+2} &= \frac{S_{\triangle}}{12} \cdot (f_i + f_{i+1} + 2 \cdot f_{i+2}) \end{aligned} \tag{6.43}$$

Таким образом, локальный вектор нагрузки для двумерного треугольного элемента имеет вид

$$\mathbf{R}_{\triangle} = \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \\ r_{i+2} \end{bmatrix} = \frac{S_{\triangle}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{bmatrix}. \tag{6.44}$$

Заметим, что полученный вектор нагрузки совпадает с произведением локальной матрицы демпфирования (6.28) на вектор узловых значений источника, то есть $\mathbf{R}_{\triangle} = \mathbf{C}_{\triangle} \cdot \mathbf{f}$.

Глобальный вектор нагрузки $\mathbf{R}$ получается путём суммирования вкладов от всех треугольных элементов сетки методом сборки: элементы локальных векторов добавляются к соответствующим элементам глобального вектора согласно глобальной

нумерации узлов. Размерность глобального вектора нагрузки равна N, где N — общее количество узлов сетки. Важно отметить, что для внутренних узлов происходит суммирование вкладов от всех смежных треугольных элементов, содержащих данный узел. Для граничных узлов элементные вклады собираются так же, но при последующем учёте граничных условий соответствующие компоненты системы могут изменяться.

Вектор нагрузки 3D

Теперь вычислим вектор нагрузки для трёхмерного случая. Вектор нагрузки связан с интегралом произведения функции источника на пробную функцию. Рассмотрим интеграл для одного тетраэдра с вершинами

$$(x_i, y_i, z_i), \quad (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}), \quad (x_{i+2}, y_{i+2}, z_{i+2}), \quad (x_{i+3}, y_{i+3}, z_{i+3})$$

$$\int_{\text{тет}} f(x,y,z) \cdot \upsilon \, dV. \tag{6.45}$$

Пробная функция на тетраэдре имеет вид $\upsilon_{(i)(i+3)}(x,y,z) = q_i \cdot \phi_i(x,y,z) + q_{i+1} \cdot \phi_{i+1}(x,y,z) + q_{i+2} \cdot \phi_{i+2}(x,y,z) + q_{i+3} \cdot \phi_{i+3}(x,y,z)$. Для вычисления интеграла необходимо интерполировать функцию источника $f(x,y,z)$ на тетраэдре линейной функцией. Представим $f(x,y,z)$ в виде $\widetilde{f}(x,y,z) = e_1 + e_2 \cdot x + e_3 \cdot y + e_4 \cdot z$. Коэффициенты e_1, e_2, e_3, e_4 определяются из условий интерполяции в узлах

$$\begin{cases} e_1 + e_2 \cdot x_i + e_3 \cdot y_i + e_4 \cdot z_i = f_i \\ e_1 + e_2 \cdot x_{i+1} + e_3 \cdot y_{i+1} + e_4 \cdot z_{i+1} = f_{i+1} \\ e_1 + e_2 \cdot x_{i+2} + e_3 \cdot y_{i+2} + e_4 \cdot z_{i+2} = f_{i+2} \\ e_1 + e_2 \cdot x_{i+3} + e_3 \cdot y_{i+3} + e_4 \cdot z_{i+3} = f_{i+3} \end{cases} \tag{6.46}$$

Поскольку функции «крышки» ϕ_n равны единице в своём узле и нулю в остальных, линейный интерполянт функции источника, выраженный через них, принимает вид

$$\widetilde{f}(x,y,z) = f_i \cdot \phi_i + f_{i+1} \cdot \phi_{i+1} + f_{i+2} \cdot \phi_{i+2} + f_{i+3} \cdot \phi_{i+3}, \tag{6.47}$$

где $f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3}$ — значения функции источника в вершинах тетраэдра.

Подставим интерполированную функцию источника и пробную функцию в (6.45). Примем во внимание (6.30) из раздела о функциях «крышек»

$$\int_{\text{тет}} f(x,y,z) \cdot \upsilon \, dV = \int_{\text{тет}} \left(\sum_n f_n \cdot \phi_n \right) \cdot \left(\sum_m q_m \cdot \phi_m \right) dV = \sum_m \sum_n q_m \cdot f_n \cdot \int_{\text{тет}} \phi_m \cdot \phi_n \, dV,$$

где индексы m и n пробегают вершины тетраэдра $\{i, i+1, i+2, i+3\}$.

Воспользуемся соотношениями (6.31) для интегралов произведений функций «крышек», выведенными при вычислении матрицы демпфирования, где $V_{\text{тет}}$ — объём тетраэдра, который вычисляется по формуле (6.15). После приведения подобных получаем

$$\begin{aligned}\int_{\text{тет}} f(x,y,z)\cdot\upsilon\, dV &= \frac{V_{\text{тет}}}{20}\cdot\Big[q_i\cdot(2\cdot f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3}) \\ &+ q_{i+1}\cdot(f_i + 2\cdot f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3}) \\ &+ q_{i+2}\cdot(f_i + f_{i+1} + 2\cdot f_{i+2} + f_{i+3}) \\ &+ q_{i+3}\cdot(f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + 2\cdot f_{i+3})\Big]\end{aligned}$$

Введём обозначения для элементов локального вектора нагрузки тетраэдра

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{V_{\text{тет}}}{20}\cdot(2\cdot f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3}) \\ r_{i+1} &= \frac{V_{\text{тет}}}{20}\cdot(f_i + 2\cdot f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3}) \\ r_{i+2} &= \frac{V_{\text{тет}}}{20}\cdot(f_i + f_{i+1} + 2\cdot f_{i+2} + f_{i+3}) \\ r_{i+3} &= \frac{V_{\text{тет}}}{20}\cdot(f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + 2\cdot f_{i+3}) \end{aligned} \tag{6.48}$$

Таким образом, локальный вектор нагрузки для трёхмерного тетраэдрального элемента имеет вид

$$\mathbf{R}_{\text{тет}} = \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \\ r_{i+2} \\ r_{i+3} \end{bmatrix} = \frac{V_{\text{тет}}}{20}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \\ f_{i+3} \end{bmatrix}. \tag{6.49}$$

Заметим, что полученный вектор нагрузки совпадает с произведением локальной матрицы демпфирования (6.33) на вектор узловых значений источника, то есть $\mathbf{R}_{\text{тет}} = \mathbf{C}_{\text{тет}}\cdot\mathbf{f}$.

Глобальный вектор нагрузки $\mathbf{R}$ получается путём суммирования вкладов от всех тетраэдральных элементов сетки методом сборки: элементы локальных векторов добавляются к соответствующим элементам глобального вектора согласно глобальной нумерации узлов. Размерность глобального вектора нагрузки равна N, где N — общее количество узлов сетки. Важно отметить, что для внутренних узлов происходит суммирование вкладов от всех смежных тетраэдральных элементов, содержащих данный узел. Для граничных узлов элементные вклады собираются так же, но при последующем учёте граничных условий соответствующие компоненты системы могут изменяться.

Глава 7

Примеры

Тепловое поле 1D, Дирихле

Пример: нестационарная задача Дирихле

Рассмотрим конкретный пример нестационарной задачи Дирихле. Возьмём стержень на отрезке $[\alpha, \beta] = [0, 1]$ с температуропроводностью $a^2 = 0{,}05$. Изначально стержень холодный, а температура на концах не задана сразу, а растёт во времени: концы линейно прогреваются от нуля до 20 и 80 соответственно за первые 5 секунд, после чего удерживаются. Внутри стержня поместим точечный источник тепла $f(x) = P \cdot \delta(x - x_0)$ мощностью $P = 10$ в точке $x_0 = 0{,}35$. Постановка задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + P \cdot \delta(x - x_0), \\ T(x,0) = 0, \\ T(\alpha,t) = \varphi_\alpha(t), \\ T(\beta,t) = \varphi_\beta(t), \end{cases} \tag{7.1}$$

где температуры на концах зависят от времени

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \le t \le 5, \\ 20, & t > 5, \end{cases} \qquad \varphi_\beta(t) = \begin{cases} 16t, & 0 \le t \le 5, \\ 80, & t > 5. \end{cases}$$

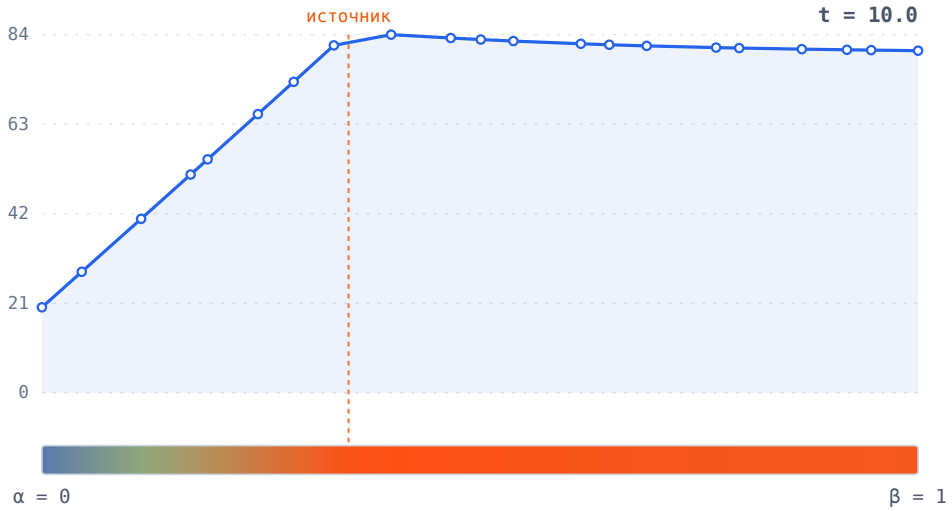

Рис. 7.1. Нестационарная задача Дирихле: прогрев стержня во времени. Синяя кривая — профиль температуры $T(x,t)$, оранжевая отметка — точечный источник.

(интерактивная версия на сайте)

Тепловое поле 2D, Дирихле

Пример: пластина с источником тепла

Рассмотрим двумерный пример с внутренним источником тепла. Возьмём квадратную пластину $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ с температуропроводностью $a^2 = 0{,}004$. Края пластины поддерживаются при нулевой температуре (условие Дирихле), а вблизи углов помещены четыре точечных источника тепла $f(x,y) = \sum_{k=1}^{4} P_k \cdot \delta(x - x_k,\, y - y_k)$. В начальный момент пластина неравномерно нагрета. Со временем начальное тепло уходит через холодные края, а источники поддерживают горячие области, и решение выходит на установившийся профиль. Постановка задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\dfrac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right) + \sum_{k=1}^{4} P_k \cdot \delta(x - x_k,\, y - y_k), \\ T(x,y,0) = T_0(x,y), \\ T|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

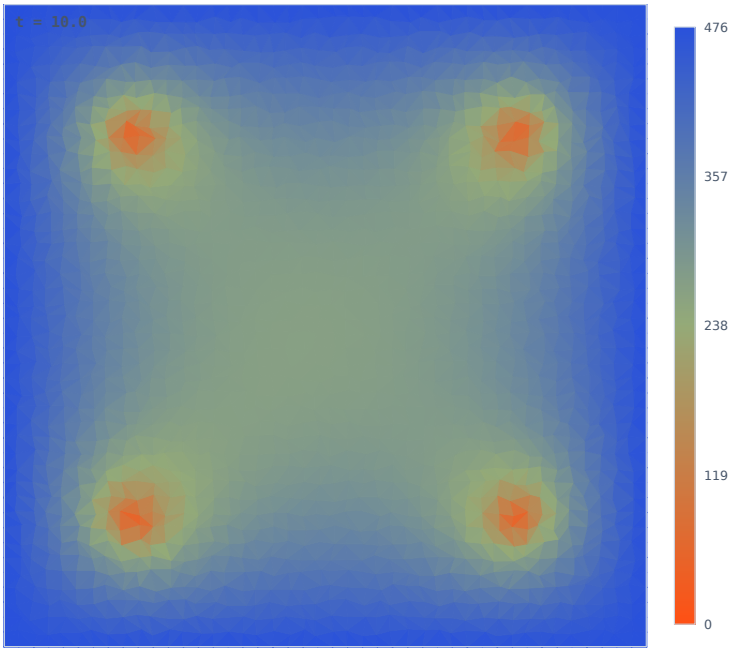

Рис. 7.2. Двумерная задача Дирихле с внутренним источником тепла. Цветом показана температура $T(x, y, t)$ в каждой точке пластины; справа — шкала температуры.

(интерактивная версия на сайте)

Магнитное поле 2D

Рассмотрим магнитостатику — стационарное поле прямоугольного постоянного магнита, однородно намагниченного ($\mathbf{M} = \text{const}$). Свободных токов нет, поэтому поле потенциально: $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, откуда $\mathbf{H} = -\nabla\varphi$. Подставляя это в условие $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ при $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, получаем для скалярного потенциала одно эллиптическое уравнение (с оператором Лапласа) и условие Дирихле на внешней границе — поле затухает вдали

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \sigma(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Слева — оператор Лапласа ($\nabla^2 = \Delta$). Правая часть — источник $\sigma = \nabla \cdot \mathbf{M}$: у однородного магнита внутри он равен нулю, а на полюсных гранях даёт связанный поверхностный заряд (по сути — нормальный «поток» намагниченности $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$), который зависит от того, на какой грани мы находимся

$$\sigma = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} +M, & \text{правая грань (N)}, \\ -M, & \text{левая грань (S)}, \\ 0, & \text{верхняя и нижняя грани}. \end{cases}$$

Уравнение (7.3) — уравнение Пуассона, то есть эллиптическая краевая задача; об эллиптических уравнениях и сведении к ним нестационарных задач — в приложении N. Решаем её численно методом конечных элементов на треугольной сетке: слабая форма $\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\text{магнит}} \mathbf{M} \cdot \nabla v \, d\Omega$.

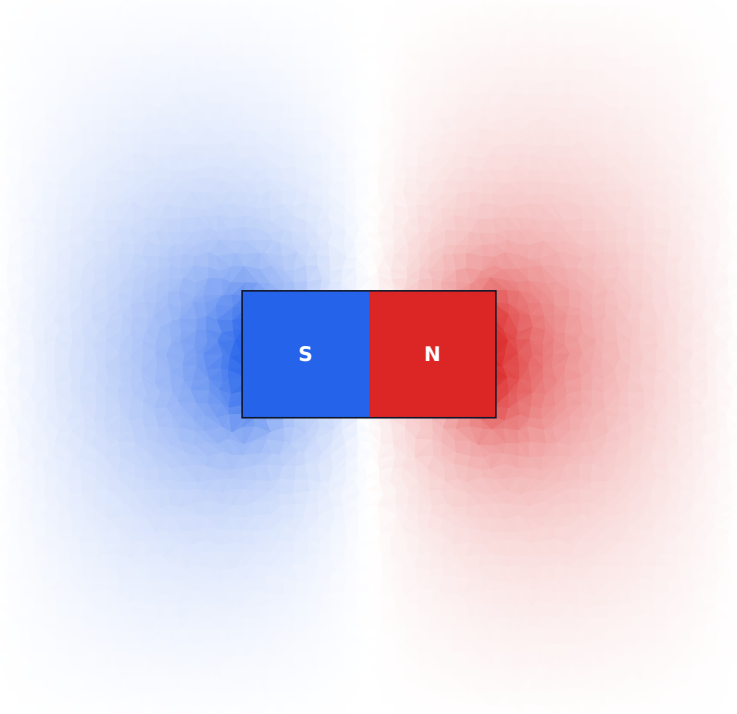

Рис. 7.3. Численное (МКЭ) поле прямоугольного магнита (N — красный полюс, S — синий). Цветом показана карта потенциала φ; кнопка ∇ накладывает векторы поля.

(интерактивная версия на сайте)

Электрическое поле трёхфазного кабеля 2D

Рассмотрим поперечное сечение трёхжильного кабеля. Внутри заземлённой металлической оболочки (на ней потенциал $\varphi = 0$) расположены три токопроводящие жилы — фазы A, B и C, симметрично через 120°. Между жилами и оболочкой — диэлектрик без свободных зарядов, поэтому потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Лапласа, а каждая жила является эквипотенциалью с мгновенным фазным напряжением (условие Дирихле):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \varphi\big|_{\Gamma_k} = V_k(t), \quad k = A, B, C, \\ \varphi\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Здесь Ω — диэлектрик (область между жилами и оболочкой), Γ_k — границы жил, $\partial\Omega$ — внутренняя поверхность оболочки. Напряжения на жилах образуют симметричную трёхфазную систему. Для сети с линейным напряжением 380 В фазное действующее равно 220 В, то есть амплитуда $U_m = 220\sqrt{2} \approx 311$ В:

$$\begin{aligned} V_A &= U_m \sin\theta, \\ V_B &= U_m \sin\!\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right), \qquad \theta = \omega t. \\ V_C &= U_m \sin\!\left(\theta + \tfrac{2\pi}{3}\right), \end{aligned} \tag{7.5}$$

Поскольку $V_A + V_B + V_C = 0$, картина поля непрерывно перетекает, оставаясь симметричной. Задачу (7.4) решаем численно методом конечных элементов на треугольной сетке: слабая форма $\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla v\, d\Omega = 0$ при заданных значениях φ на жилах и оболочке. Для каждого мгновения θ — своя правая часть (свои отношения потенциалов), поэтому ниже последовательно решается серия краевых задач, имитирующая ход синусоид.

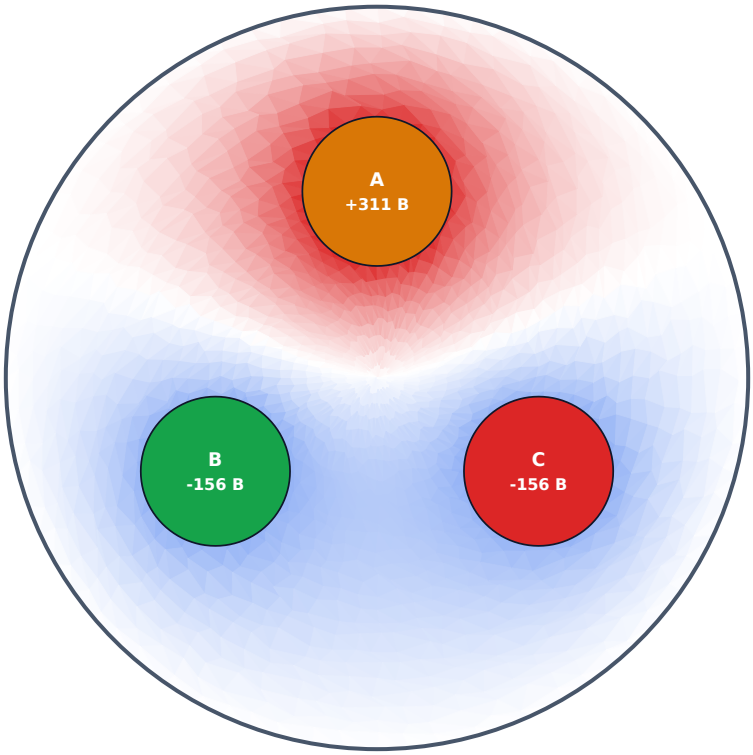

Рис. 7.4. Численное (МКЭ) электростатическое поле трёхфазного кабеля. Цветом показана карта потенциала φ (синий — минус, красный — плюс), в жилах — мгновенные напряжения. Кнопка ∇ накладывает векторы поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, кнопка ▶ запускает анимацию хода синусоид.

(интерактивная версия на сайте)

Тепловое поле 3D, Дирихле

Пример: нагрев шара источниками

Рассмотрим трёхмерный нестационарный пример. Возьмём шар $\Omega = \{\,\mathbf{r} : |\mathbf{r}| \le R\,\}$ с температуропроводностью $a^2 = 0{,}3$. Поверхность шара поддерживается при нулевой температуре (условие Дирихле), а внутри симметрично размещены шесть точечных источников тепла $f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{6} P_k\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ (в вершинах октаэдра). В начальный момент шар холодный; со временем источники прогревают его, а через холодную поверхность тепло уходит, и решение выходит на установившийся профиль. Постановка задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \sum_{k=1}^{6} P_k \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ T(\mathbf{r}, 0) = 0, \\ T|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{7.6}$$

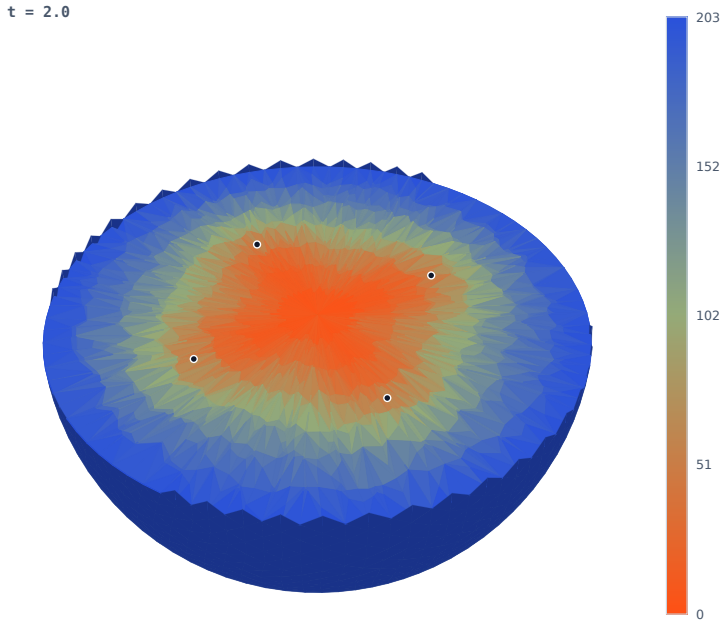

Рис. 7.5. Трёхмерная нестационарная задача Дирихле: нагрев шара шестью внутренними источниками. Цветом показана температура $T(\mathbf{r}, t)$.

(интерактивная версия на сайте)

Приложение A

Ряды Фурье

Здесь в самом общем виде напомним, как функция раскладывается в ряд по ортогональной системе функций — этим разложением мы пользуемся всюду, где решаем краевые задачи методом разделения переменных. Пусть в области G задана система функций $\varphi_1(M), \varphi_2(M), \ldots$, попарно ортогональных с весовой функцией $\rho(M) > 0$, то есть

$$\iiint_G \rho(M) \cdot \varphi_n(M) \cdot \varphi_m(M)\, dG = 0, \quad n \neq m. \tag{A.1}$$

Функцию $f(M)$ называют разложимой по этой системе, если её можно представить сходящимся рядом

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(M). \tag{A.2}$$

Коэффициенты c_n (их называют коэффициентами Фурье) находятся благодаря ортогональности. Умножим обе части (A.2) на $\rho(M)\cdot\varphi_m(M)$ и проинтегрируем по области G. В силу ортогональности (A.1) в правой части уцелеет лишь одно слагаемое — с $n = m$:

$$\iiint_G \rho(M) \cdot f(M) \cdot \varphi_n(M)\, dG = c_n \cdot \iiint_G \rho(M) \cdot \varphi_n^2(M)\, dG, \tag{A.3}$$

откуда коэффициенты разложения определяются однозначно:

$$c_n = \frac{\iiint_G \rho(M) \cdot f(M) \cdot \varphi_n(M)\, dG}{\iiint_G \rho(M) \cdot \varphi_n^2(M)\, dG}. \tag{A.4}$$

Знаменатель в формуле (A.4) — это квадрат нормы функции φ_n:

$$\|\varphi_n\|^2 = \iiint_G \rho(M) \cdot \varphi_n^2(M)\, dG. \tag{A.5}$$

Формула (A.4) универсальна: какой бы ни была ортогональная система, коэффициенты разложения по ней вычисляются одинаково. Вес $\rho(M)$ задаётся системой координат, в которой разделяются переменные: это множитель, с которым координата входит в элемент объёма (якобиан) и относительно которого ортогональна система $\{\varphi_n\}$. Для основных систем он равен:

Система координат	ρ
декартова (1D)	1
полярная (r)	r
сферическая (r)	r^2

Приложение B

Специальные функции

При решении краевых задач методом разделения переменных уравнение в частных производных распадается на обыкновенные дифференциальные уравнения по каждой координате. В зависимости от системы координат и геометрии области эти уравнения приводят к разным семействам ортогональных функций.

Функции Бесселя первого рода $J_m(r)$. Возникают при разделении переменных в полярных и цилиндрических координатах: радиальная часть уравнения Гельмгольца сводится к уравнению Бесселя

$$r^2 \cdot \frac{d^2y(r)}{dr^2} + r \cdot \frac{dy(r)}{dr} + (r^2 - m^2) \cdot y(r) = 0.$$

Графики первых порядков показаны на рисунке (B.1).

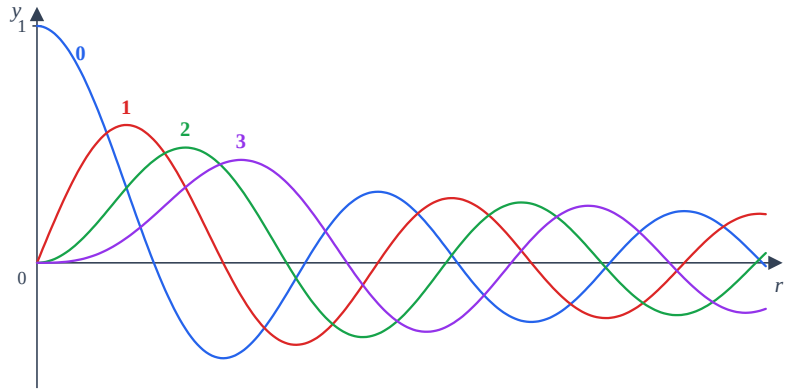

Рис. B.1. Функции Бесселя первого рода $J_m(r)$ порядков $m = 0, 1, 2, 3$.

Функции Неймана $Y_m(r)$ (функции Бесселя второго рода). Возникают как второе линейно независимое решение того же уравнения Бесселя. В отличие от J_m, они неограниченно растут по модулю у оси: $Y_m(r) \to -\infty$ при $r \to 0$. Поэтому в задачах, где область включает ось $r = 0$, их отбрасывают из условия ограниченности решения, но в кольцевых (не содержащих оси) областях они входят в решение наравне с J_m. Графики первых порядков показаны на рисунке (B.2).

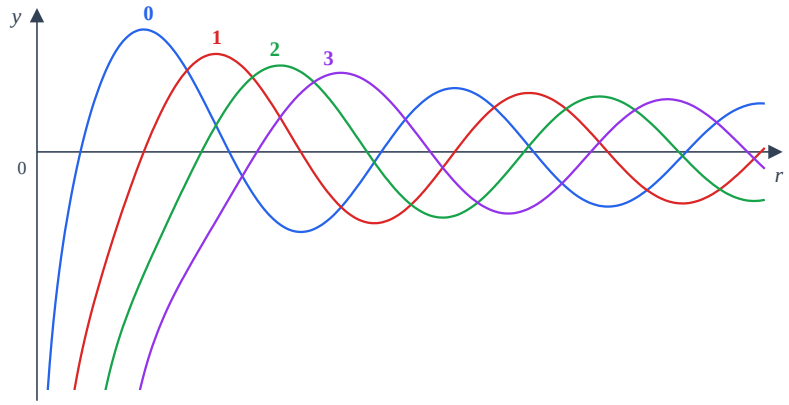

Рис. В.2. Функции Неймана $Y_m(r)$ порядков $m = 0, 1, 2, 3$.

Сферические функции Бесселя $j_k(r)$. Появляются в радиальной части уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$r^2 \cdot \frac{d^2y(r)}{dr^2} + 2 \cdot r \cdot \frac{dy(r)}{dr} + \big(r^2 - k \cdot (k+1)\big) \cdot y(r) = 0.$$

Подстановка $R(r) = \dfrac{1}{\sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r)$ сводит его к уравнению Бесселя полуцелого порядка, поэтому решения выражаются через обычные функции Бесселя

$$j_k(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot r}} \cdot J_{k+1/2}(r).$$

Как и в цилиндрическом случае, j_k осциллируют с убывающей амплитудой; их графики приведены на рисунке (В.3).

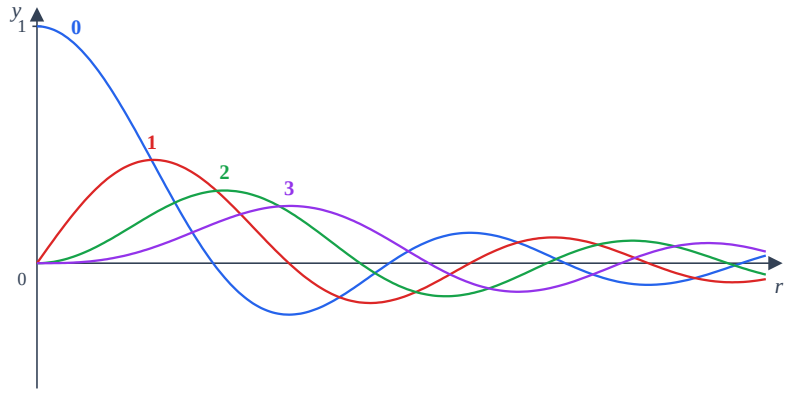

Рис. В.3. Сферические функции Бесселя $j_k(r)$ порядков $k = 0, 1, 2, 3$.

Полиномы Лежандра $P_k(z)$. Возникают из угловой (полярной) части уравнения Гельмгольца в сферических координатах. После замены $z = \cos(\theta)$ и при $m = 0$ уравнение принимает вид уравнения Лежандра

$$(1 - z^2) \cdot \frac{d^2y(z)}{dz^2} - 2 \cdot z \cdot \frac{dy(z)}{dz} + k \cdot (k+1) \cdot y(z) = 0,$$

ограниченные на отрезке $z \in [-1, 1]$ решения которого — полиномы Лежандра степени k. Они образуют ортогональный базис на $[-1, 1]$; несколько первых показаны на рисунке (B.4).

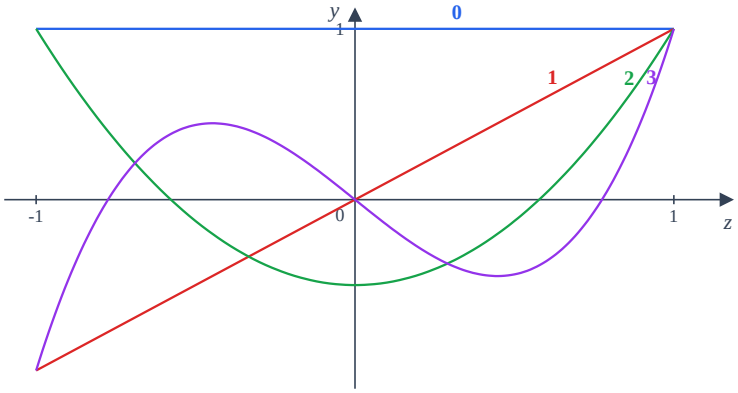

Рис. B.4. Полиномы Лежандра $P_k(z)$ степеней $k = 0, 1, 2, 3$.

Присоединённые функции Лежандра $P_k^{(m)}(z)$. Если в полярной части $m \neq 0$, то уравнение Лежандра обобщается до присоединённого уравнения

$$(1 - z^2) \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} - 2 \cdot z \cdot \frac{dy(z)}{dz} + \left[k \cdot (k+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] \cdot y(z) = 0,$$

решения которого — присоединённые функции Лежандра $P_k^{(m)}(z)$, выражающиеся через полиномы Лежандра

$$P_k^{(m)}(z) = (1 - z^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m}{dz^m} P_k(z).$$

При $m = 0$ они переходят в полиномы Лежандра $P_k(z)$, а вместе с азимутальным множителем $\cos(m \cdot \phi)$ или $\sin(m \cdot \phi)$ образуют угловую часть собственной функции.

Приложение C

Норма функции Бесселя (Дирихле)

Для вычисления нормы решения уравнения для геометрии необходимо вычислить норму функции Бесселя, которая определяется следующим образом

$$\int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\, dr, \tag{C.1}$$

где μ — одно из решений уравнения $J_m(\mu) = 0$.
Известны следующие интегралы

$$\int r^{m+1} \cdot J_m(r)\, dr = r^{m+1} \cdot J_{m+1}(r) + C, \tag{C.2}$$

$$\int r^{-m} \cdot J_{m+1}(r)\, dr = -r^{-m} \cdot J_m(r) + C, \tag{C.3}$$

а также формулы для производных функции Бесселя

$$r \cdot \frac{dJ_m(r)}{dr} = m \cdot J_m(r) - r \cdot J_{m+1}(r), \quad \text{при } m = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dJ_0(r)}{dr} = -J_1(r), \tag{C.4}$$

$$r \cdot \frac{dJ_m(r)}{dr} = -m \cdot J_m(r) + r \cdot J_{m-1}(r), \quad \text{при } m = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dJ_0(r)}{dr} = J_{-1}(r). \tag{C.5}$$

Попробуем вычислить норму (C.1) интегрированием по частям:

$$\int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\, dr = \left| \begin{array}{l} u = r^{-m} \cdot J_m(r), \quad v = r^{m+1} \cdot J_{m+1}(r) \\ du = -m \cdot r^{-m-1} \cdot J_m(r)\, dr + r^{-m-1} \cdot [m \cdot J_m(r) - r \cdot J_{m+1}(r)]\, dr \\ dv = r^{m+1} \cdot J_m(r)\, dr \end{array} \right|$$

$$\int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\, dr = r \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\Big|_0^{\mu} + \int_0^{\mu} r \cdot J_{m+1}^2(r)\, dr = \int_0^{\mu} r \cdot J_{m+1}^2(r)\, dr.$$

Полученный интеграл также возьмём по частям:

$$\int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\,dr = \left| \begin{array}{ll} u = J_{m+1}^2(r), & du = 2 \cdot J_{m+1}(r) \cdot \frac{1}{r} \cdot [-(m+1) \cdot J_{m+1}(r) + r \cdot J_m(r)]\ dr \\ dv = r\,dr, & v = r^2/2 \end{array} \right|$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\,dr = \frac{\mu^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu) + (m+1) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\,dr - \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr.$$

Последний интеграл возьмём по частям:

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr = \left| \begin{array}{l} u = r^{m+2} \cdot J_m(r), \quad v = -r^{-m} \cdot J_m(r) \\ du = (m+2) \cdot r^{m+1} \cdot J_m(r) + r^{m+1} \cdot [m \cdot J_m(r) - r \cdot J_{m+1}(r)]\ dr \\ dv = r^{-m} \cdot J_{m+1}(r)\,dr \end{array} \right|$$

$$u \cdot v\Big|_0^\mu = -r^2 \cdot J_m^2(r)\Big|_0^\mu = 0,$$

$$du \cdot v = -2 \cdot (m+1) \cdot r \cdot J_m^2(r) + r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r),$$

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr = 2 \cdot (m+1) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr - \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr,$$

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr = (m+1) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr.$$

Подставим последнее равенство в полученное ранее выражение для интеграла $\int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\,dr$. С учётом равенства $\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr = \int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\,dr$ слагаемые с $(m+1)$ сокращаются, и окончательно получаем:

$$\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr = \frac{\mu^2}{2} \cdot J_{m+1}^2(\mu). \tag{C.6}$$

Приложение D

Норма функции Бесселя (Нейман)

Для вычисления нормы решения уравнения для геометрии необходимо вычислить норму функции Бесселя, которая определяется следующим образом

$$\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\, dr, \tag{D.1}$$

где μ — одно из решений уравнения $\left.\dfrac{dJ_m(r)}{dr}\right|_{r=\mu} = 0$.

Из формулы (C.4) при $r = \mu$, где $J'_m(\mu) = 0$, получаем соотношение $m \cdot J_m(\mu) = \mu \cdot J_{m+1}(\mu)$, которое используется ниже.

Попробуем вычислить норму (D.1) интегрированием по частям:

$$\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\, dr = \left| \begin{array}{l} u = r^{-m} \cdot J_m(r), \quad v = r^{m+1} \cdot J_{m+1}(r) \\ du = -m \cdot r^{-m-1} \cdot J_m(r)\, dr + r^{-m-1} \cdot [m \cdot J_m(r) - r \cdot J_{m+1}(r)]\ dr \\ dv = r^{m+1} \cdot J_m(r)\, dr \end{array} \right|$$

Граничный член, в отличие от случая Дирихле, не обращается в нуль:

$$r \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\Big|_0^\mu = \mu \cdot J_m(\mu) \cdot J_{m+1}(\mu) = m \cdot J_m^2(\mu).$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\, dr = m \cdot J_m^2(\mu) + \int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\, dr.$$

Полученный интеграл также возьмём по частям:

$$\int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\, dr = \left| \begin{array}{ll} u = J_{m+1}^2(r), & du = 2 \cdot J_{m+1}(r) \cdot \frac{1}{r} \cdot [-(m+1) \cdot J_{m+1}(r) + r \cdot J_m(r)]\ dr \\ dv = r\, dr, & v = r^2/2 \end{array} \right|$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\, dr = \frac{m^2}{2} \cdot J_m^2(\mu) + (m+1) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\, dr - \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\, dr.$$

Последний интеграл возьмём по частям:

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr = \left| \begin{array}{l} u = r^{m+2} \cdot J_m(r), \quad v = -r^{-m} \cdot J_m(r) \\ du = (m+2) \cdot r^{m+1} \cdot J_m(r) + r^{m+1} \cdot [m \cdot J_m(r) - r \cdot J_{m+1}(r)]\ dr \\ dv = r^{-m} \cdot J_{m+1}(r)\,dr \end{array} \right|$$

$$u \cdot v\Big|_0^\mu = -r^2 \cdot J_m^2(r)\Big|_0^\mu = -\mu^2 \cdot J_m^2(\mu),$$

$$du \cdot v = -2 \cdot (m+1) \cdot r \cdot J_m^2(r) + r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r),$$

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr = -\mu^2 \cdot J_m^2(\mu) + 2 \cdot (m+1) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr - \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr,$$

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr = -\frac{\mu^2}{2} \cdot J_m^2(\mu) + (m+1) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr.$$

Подставляя найденные равенства последовательно одно в другое, выражаем норму:

$$\int_0^\mu r \cdot J_{m+1}^2(r)\,dr = \frac{1}{m} \cdot \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr - \frac{m}{2} \cdot J_m^2(\mu),$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr = m \cdot J_m^2(\mu) + \frac{1}{m} \cdot \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr - \frac{m}{2} \cdot J_m^2(\mu),$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_m^2(r)\,dr = \frac{m}{2} \cdot J_m^2(\mu) + \frac{1}{m} \cdot \int_0^\mu r^2 \cdot J_m(r) \cdot J_{m+1}(r)\,dr,$$

$$\int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\,dr = \frac{m}{2} \cdot J_m^2(\mu) - \frac{\mu^2}{2 \cdot m} \cdot J_m^2(\mu) + \frac{m+1}{m} \cdot \int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\,dr,$$

$$\frac{1}{m} \cdot \int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\,dr = -\frac{m}{2} \cdot J_m^2(\mu) + \frac{\mu^2}{2 \cdot m} \cdot J_m^2(\mu).$$

В итоге получаем:

$$\int_0^{\mu} r \cdot J_m^2(r)\,dr = \left(\mu^2 - m^2\right) \cdot \frac{J_m^2(\mu)}{2}. \tag{D.2}$$

Приложение E

Уравнение Лежандра

При решении уравнения для геометрии в сферических координатах возникает следующее уравнение для полярного угла

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\cdot\frac{d\Theta(z)}{dz}\right)+\left[\gamma_1^2-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\cdot\Theta(z)=0,\quad -1<z<1, \tag{E.1}$$

где $\Theta(z)$ — искомая функция, m — целое неотрицательное число, γ_1^2 — константа разделения переменных. Раскроем производную в первом члене

$$(1-z^2)\cdot\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-2\cdot z\cdot\frac{d\Theta(z)}{dz}+\left[\gamma_1^2-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\cdot\Theta(z)=0.$$

Заметим, что при $m=0$ уравнение принимает вид уравнения Лежандра

$$(1-z^2)\cdot\frac{d^2\Theta(z)}{dz^2}-2\cdot z\cdot\frac{d\Theta(z)}{dz}+\gamma_1^2\cdot\Theta(z)=0,\quad -1<z<1.$$

Это уравнение имеет ограниченные на интервале $-1<z<1$ решения только при собственных значениях $\gamma_{1k}^2=k\cdot(k+1)$, $k\in(0..\infty)$; эти решения задаются формулой Родрига

$$\Theta_k(z)=P_k(z)=\frac{1}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{d^k}{dz^k}\left(z^2-1\right)^k, \tag{E.2}$$

где $P_k(z)$ — полиномы Лежандра. Будем искать решения уравнения (E.1) при тех же собственных значениях $\gamma_{1k}^2=k\cdot(k+1)$ — тогда оно запишется в виде

$$(1-z^2)\cdot\frac{d^2\Theta_{km}(z)}{dz^2}-2\cdot z\cdot\frac{d\Theta_{km}(z)}{dz}+\left[k\cdot(k+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\cdot\Theta_{km}(z)=0,\quad k\in(0..\infty). \tag{E.3}$$

Сделаем подстановку $\Theta_{km}(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)$ в уравнение (E.3). Первая производная примет вид

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)\right] = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} - m \cdot z \cdot (1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z).$$

Для вычисления второй производной предварительно вычислим

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{1-z^2}\right] = \frac{1}{1-z^2} + \frac{2 \cdot z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}.$$

Тогда вторая производная запишется в виде

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[(1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)\right] = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^2\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz^2} - m \cdot z \cdot (1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} - m \cdot \frac{z}{1-z^2} \cdot \left[(1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} - m \cdot z \cdot (1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)\right] - m \cdot \frac{1+z^2}{(1-z^2)^2} \cdot (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z).$$

После приведения подобных слагаемых она примет вид

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[(1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)\right] = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^2\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz^2} - \frac{2 \cdot m \cdot z}{1-z^2} \cdot (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} + m \cdot \frac{m \cdot z^2 - 1 - z^2}{(1-z^2)^2} \cdot (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z).$$

Подставим всё в уравнение (E.3), попутно сокращая $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$:

$$(1-z^2) \cdot \left[\frac{d^2\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz^2} - \frac{2 \cdot m \cdot z}{1-z^2} \cdot \frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} + m \cdot \frac{m \cdot z^2 - 1 - z^2}{(1-z^2)^2} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)\right] - 2 \cdot z \cdot \left[\frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} - \frac{m \cdot z}{1-z^2} \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z)\right] + \left[k \cdot (k+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z) = 0.$$

Сгруппируем коэффициенты при производных:

$$\zeta_1 \cdot \frac{d^2\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz^2} + \zeta_2 \cdot \frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz} + \zeta_3 \cdot \widehat{\Theta}_{km}(z) = 0,$$

$$\zeta_1 = 1 - z^2,$$

$$\zeta_2 = -2 \cdot m \cdot z - 2 \cdot z = -2 \cdot (m+1) \cdot z,$$

$$\zeta_3 = m \cdot \frac{m \cdot z^2 - 1 - z^2}{1-z^2} + \frac{2 \cdot m \cdot z^2}{1-z^2} + k \cdot (k+1) - \frac{m^2}{1-z^2} =$$
$$\frac{m^2 \cdot z^2 - m - m \cdot z^2 + 2 \cdot m \cdot z^2 - m^2}{1-z^2} + k \cdot (k+1) = -\frac{m^2 \cdot (1-z^2) + m \cdot (1-z^2)}{1-z^2} +$$
$$k \cdot (k+1) = -m^2 - m + k \cdot (k+1) = (k-m) \cdot (k+m+1),$$

таким образом, после подстановки уравнение (E.3) принимает вид

$$(1-z^2)\cdot\frac{d^2\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz^2}-2\cdot(m+1)\cdot z\cdot\frac{d\widehat{\Theta}_{km}(z)}{dz}+(k-m)\cdot(k+m+1)\cdot\widehat{\Theta}_{km}(z)=0. \quad \text{(E.4)}$$

Возьмём уравнение (E.3), положим $m=0$ и учтём, что его решением в этом случае являются полиномы Лежандра $P_k(z)$ — получим следующее уравнение

$$(1-z^2)\cdot\frac{d^2P_k(z)}{dz^2}-2\cdot z\cdot\frac{dP_k(z)}{dz}+k\cdot(k+1)\cdot P_k(z)=0, \quad \text{(E.5)}$$

которое продифференцируем m раз с помощью формулы Лейбница, определяемой следующим образом

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(u(z)\cdot v(z)\right)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\cdot\frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}}u(z)\cdot\frac{d^i}{dz^i}v(z),$$

где $\binom{m}{i}=\frac{m!}{i!\cdot(m-i)!}$ — биномиальный коэффициент.

Начнём с первого члена уравнения (E.5), приняв $v(z)=1-z^2$

$$\frac{d^0}{dz^0}v=1-z^2;\quad \frac{d^1}{dz^1}v=-2\cdot z;\quad \frac{d^2}{dz^2}v=-2;\quad \frac{d^i}{dz^i}v=0,\quad i\in(3..\infty),$$

теперь примем $v(z)=-2\cdot z$, получим

$$\frac{d^0}{dz^0}v=-2\cdot z;\quad \frac{d^1}{dz^1}v=-2;\quad \frac{d^i}{dz^i}v=0,\quad i\in(2..\infty),$$

для случая $v(z)=k\cdot(k+1)$ всё тривиально

$$\frac{d^0}{dz^0}v=k\cdot(k+1);\quad \frac{d^i}{dz^i}v=0,\quad i\in(1..\infty).$$

Биномиальные коэффициенты соответственно равны

$$\binom{m}{0}=1;\quad \binom{m}{1}=m;\quad \binom{m}{2}=\frac{m\cdot(m-1)}{2}.$$

Результат дифференцирования первого члена уравнения (E.5) равен

$$(1-z^2)\cdot\frac{d^{m+2}}{dz^{m+2}}P_k(z)-2\cdot z\cdot m\cdot\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}P_k(z)-m\cdot(m-1)\cdot\frac{d^m}{dz^m}P_k(z),$$

для второго члена

$$-2\cdot z\cdot\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}P_k(z)-2\cdot m\cdot\frac{d^m}{dz^m}P_k(z),$$

для третьего члена

$$k \cdot (k+1) \cdot \frac{d^m}{dz^m} P_k(z),$$

сложим все три члена

$$(1-z^2) \cdot \frac{d^{m+2}}{dz^{m+2}} P_k(z) - 2 \cdot (m+1) \cdot z \cdot \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} P_k(z) + (k-m) \cdot (k+m+1) \cdot \frac{d^m}{dz^m} P_k(z).$$

Левая часть уравнения (E.5) тождественно равна нулю, поэтому равна нулю и её m-кратная производная:

$$(1-z^2) \cdot \frac{d^{m+2}}{dz^{m+2}} P_k(z) - 2 \cdot (m+1) \cdot z \cdot \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} P_k(z) + (k-m) \cdot (k+m+1) \cdot \frac{d^m}{dz^m} P_k(z) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением (E.4), откуда $\widehat{\Theta}_{km}(z) = \frac{d^m}{dz^m} P_k(z)$, а значит, решение уравнения (E.1) имеет вид

$$\Theta_{km}(z) = P_k^{(m)}(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dz^m} P_k(z), \tag{E.6}$$

где $\gamma_{1k}^2 = k \cdot (k+1)$ — собственные значения, $P_k^{(m)}(z)$ — присоединённые полиномы Лежандра. При $m > k$ производная $\frac{d^m}{dz^m} P_k(z)$ обращается в нуль, поэтому нетривиальные решения существуют только при $k \geq m$.

Приложение F

Норма полиномов Лежандра

Для вычисления нормы решения уравнения для геометрии необходимо вычислить норму присоединённого полинома Лежандра, которая определяется следующим образом

$$\int_{-1}^{1} \left[P_k^{(m)}(z)\right]^2 dz, \tag{F.1}$$

где $P_k^{(m)}(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dz^m} P_k(z)$ — присоединённый полином Лежандра. Подставим это определение в интеграл (F.1):

$$\int_{-1}^{1} \left[P_k^{(m)}(z)\right]^2 dz = \int_{-1}^{1} (1-z^2)^m \left[\frac{d^m}{dz^m} P_k(z)\right]^2 dz.$$

Подставим формулу Родрига (E.2) в интеграл и вынесем всё, что не зависит от z:

$$\int_{-1}^{1} (1-z^2)^m \left[\frac{d^m}{dz^m} P_k(z)\right]^2 dz = \frac{1}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot \int_{-1}^{1} (1-z^2)^m \cdot \left[\frac{d^{k+m}}{dz^{k+m}} \left(z^2-1\right)^k\right]^2 dz. \tag{F.2}$$

Понятно, что $m \leq k$: в противном случае порядок производной $k+m$ превышает степень полинома $2 \cdot k$, и подынтегральная функция тождественно равна нулю. Сначала вычислим вспомогательный интеграл, отвечающий случаю $m = 0$

$$\frac{1}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^k}{dz^k} \left(z^2-1\right)^k\right]^2 dz. \tag{F.3}$$

Возьмём его по частям:

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{d^k}{dz^k} \left(z^2-1\right)^k\right]^2 dz = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{d^k}{dz^k} \left(z^2-1\right)^k, & du = \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left(z^2-1\right)^k dz \\ dv = \frac{d^k}{dz^k} \left(z^2-1\right)^k dz, & v = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(z^2-1\right)^k \end{array} \right|$$

Внеинтегральные члены равны нулю: производные $\frac{d^i}{dz^i}\left(z^2-1\right)^k$ при $i<k$ обращаются в нуль на концах отрезка. После применения формулы интегрирования по частям k раз (каждое применение меняет знак) получаем

$$\frac{1}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\cdot\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^k}{dz^k}\left(z^2-1\right)^k\right]^2\,dz = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\cdot\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^k\cdot\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\left(z^2-1\right)^k\,dz,$$

теперь из формулы бинома Ньютона становится очевидно, что $\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\left(z^2-1\right)^k = (2k)!$: полином имеет максимальную степень $2\cdot k$, производная такого порядка зануляет все члены, кроме старшего, а коэффициент при нём равен $(2k)!$.

Осталось вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^k\,dz = \left|\begin{array}{ll} u=\left(z^2-1\right)^k, & du=2\cdot k\cdot z\cdot\left(z^2-1\right)^{k-1}dz \\ dv=dz, & v=z \end{array}\right|$$

очевидно, что внеинтегральный член равен нулю, поэтому

$$\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^k\,dz = -2\cdot k\cdot\int_{-1}^{1}z^2\cdot\left(z^2-1\right)^{k-1}dz,$$

заменим z^2 на z^2-1+1 и получим

$$\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^k\,dz = -\frac{2\cdot k}{2\cdot k+1}\cdot\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^{k-1}\,dz,$$

применяя эту рекуррентную формулу ещё $k-1$ раз, получим

$$\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^k\,dz = (-1)^k\cdot\frac{2\cdot k}{2\cdot k+1}\cdot\frac{2\cdot(k-1)}{2\cdot(k-1)+1}\cdot\frac{2\cdot(k-2)}{2\cdot(k-2)+1}\cdot\dots\cdot\frac{2\cdot1}{2\cdot1+1}\cdot2,$$

$$\int_{-1}^{1}\left(z^2-1\right)^k\,dz = (-1)^k\cdot2\cdot\frac{2^k\cdot k!\cdot2^k\cdot k!}{(2\cdot k+1)!}.$$

В итоге множители $(-1)^k$ сокращаются, и получаем

$$\frac{1}{2^{2k}\cdot(k!)^2}\cdot\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^k}{dz^k}\left(z^2-1\right)^k\right]^2\,dz = \frac{2}{2\cdot k+1}. \tag{F.4}$$

Запишем общеизвестную рекуррентную формулу для присоединённых полиномов Лежандра, которая потребуется для следующего интегрирования по частям

$$2\cdot m\cdot z\cdot P_k^{(m)}(z) = \sqrt{1-z^2}\cdot\left[P_k^{(m+1)}(z)+(k+m)\cdot(k-m+1)\cdot P_k^{(m-1)}(z)\right], \tag{F.5}$$

для небольшого упрощения обозначим $\epsilon = (k+m)\cdot(k-m+1)$.
Вернёмся к интегралу (F.2) и выполним интегрирование по частям:

$$\int_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)^m\cdot\left[\frac{d^m}{dz^m}P_k(z)\right]^2\,dz = \left|\begin{array}{l} u=\left(1-z^2\right)^m\cdot\dfrac{d^m}{dz^m}P_k(z) \\ du=\left(1-z^2\right)^{(m/2)-1}\cdot\left[-2\cdot m\cdot z\cdot P_k^{(m)}(z)+\sqrt{1-z^2}\cdot P_k^{(m+1)}(z)\right]\,dz= \\ \left(1-z^2\right)\dfrac{m-1}{2}\cdot\left[-P_k^{(m+1)}(z)-\epsilon\cdot P_k^{(m-1)}(z)+P_k^{(m+1)}(z)\right]\,dz= \\ -\left(1-z^2\right)\dfrac{m-1}{2}\cdot\epsilon\cdot P_k^{(m-1)}(z)\,dz \\ dv=\dfrac{d^m}{dz^m}P_k(z)\,dz, \\ v=\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}P_k(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{1-m}{2}}\cdot P_k^{(m-1)}(z) \end{array}\right|$$

внеинтегральный член содержит множитель $\sqrt{1-z^2}$ и обращается в нуль на концах отрезка, тогда получаем

$$\int_{-1}^{1}P_k^{(m)}(z)\cdot P_k^{(m)}(z)\,dz = (k+m)\cdot(k-m+1)\cdot\int_{-1}^{1}P_k^{(m-1)}(z)\cdot P_k^{(m-1)}(z)\,dz,$$

последовательно применяя интегрирование по частям ещё $m-1$ раз и принимая во внимание (F.4), получаем

$$\int_{-1}^{1}P_k^{(m)}(z)\cdot P_k^{(m)}(z)\,dz = \frac{2}{2\cdot k+1}\cdot(k+m)\cdot(k-m+1)\cdot(k+m-1)\cdot(k-m+2)\cdots,$$

множители с плюсом убывают от $k+m$ до $k+1$, множители с минусом возрастают от $k-m+1$ до k (здесь важно условие $m\le k$), поэтому

$$(k+m)\cdot(k-m+1)\cdot(k+m-1)\cdot(k-m+2)\cdots = \frac{(k+m)!}{k!}\cdot\frac{k!}{(k-m)!}=\frac{(k+m)!}{(k-m)!}.$$

Итоговая норма присоединённого полинома Лежандра имеет вид

$$\int_{-1}^{1}\left[P_k^{(m)}(z)\right]^2\,dz=\frac{2}{2\cdot k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!},\quad m\le k. \tag{F.6}$$

Приложение G

Уравнение Бесселя в сферических координатах

При решении уравнения для геометрии в сферических координатах возникает следующее уравнение для радиуса

$$r^2 \cdot \frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2 \cdot r \cdot \frac{dR(r)}{dr} + \left(r^2 \cdot \gamma^2 - k \cdot (k+1)\right) \cdot R(r) = 0, \quad \text{(G.1)}$$

где γ — собственное значение, k — целое неотрицательное число.
Сделаем подстановку $R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r)$ и проведём преобразования

$$\frac{dR(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r)\right) = -\frac{1}{2 \cdot r \cdot \sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r) + \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr},$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r \cdot \sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r)\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr}\right),$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r \cdot \sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r)\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r \cdot \sqrt{r}} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr},$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr}\right) = -\frac{1}{2 \cdot r \cdot \sqrt{r}} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr} + \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2\widehat{R}(r)}{dr^2},$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2\widehat{R}(r)}{dr^2} - \frac{1}{r \cdot \sqrt{r}} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r),$$

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R(r)}{dr^2} = r \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{d^2 \widehat{R}(r)}{dr^2} - \sqrt{r} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r),$$

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2 \cdot r \cdot \frac{dR(r)}{dr} = r \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{d^2 \widehat{R}(r)}{dr^2} + \sqrt{r} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \widehat{R}(r),$$

разделим на $r \cdot \sqrt{r}$ и запишем уравнение (G.1) через коэффициенты

$$\zeta_1 \cdot \frac{d^2 \widehat{R}(r)}{dr^2} + \zeta_2 \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr} + \zeta_3 \cdot \widehat{R}(r) = 0,$$

а теперь определим коэффициенты, предварительно преобразовав свободный член

$$\gamma^2 - \frac{k \cdot (k+1)}{r^2} - \frac{1}{4 \cdot r^2} = \gamma^2 - \frac{(k+1/2)^2}{r^2},$$

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = \frac{1}{r}, \quad \zeta_3 = \gamma^2 - \frac{(k+1/2)^2}{r^2},$$

таким образом, уравнение (G.1) принимает вид

$$\frac{d^2 \widehat{R}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\widehat{R}(r)}{dr} + \left(\gamma^2 - \frac{(k+1/2)^2}{r^2}\right) \cdot \widehat{R}(r) = 0.$$

Получили уравнение Бесселя с полуцелым индексом $k + 1/2$. Его ограниченные в нуле решения — функции Бесселя первого рода $\widehat{R}(r) = J_{k+1/2}(\gamma \cdot r)$, $k \in (0..\infty)$; решения второго рода $Y_{k+1/2}(\gamma \cdot r)$ бесконечны в нуле, что видно на рисунке (B.2), и отбрасываются из условия ограниченности. Таким образом, решение исходного уравнения (G.1) имеет вид

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot r), \tag{G.2}$$

где $J_{k+1/2}(\gamma \cdot r)$ — функция Бесселя первого рода с полуцелым индексом. С точностью до постоянного множителя это сферическая функция Бесселя: $j_k(\gamma \cdot r) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \gamma \cdot r}} \cdot J_{k+1/2}(\gamma \cdot r)$.

Приложение H

Норма сферической функции Бесселя (Нейман)

Для вычисления нормы решения уравнения для геометрии необходимо вычислить норму сферической функции Бесселя. Она отличается от обычной функции Бесселя множителем $\frac{1}{\sqrt{r}}$, а вес для сферических координат $\rho(r) = r^2$, поэтому мы приходим к тому же интегралу, что и для обычной функции Бесселя

$$\int_0^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(r)\right)^2 \cdot r^2 \, dr = \int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r) \, dr, \tag{H.1}$$

где μ — одно из решений уравнения $\left.\frac{dJ_{k+1/2}(r)}{dr}\right|_{r=\mu} = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot J_{k+1/2}(\mu)$, которое получается из условия Неймана для сферической функции Бесселя: $\left.\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot J_{k+1/2}(r)\right)\right|_{r=\mu} = 0$.

Попробуем вычислить норму (H.1) интегрированием по частям, учитывая формулы (C.2) и (C.4):

$$\left|\begin{aligned} u &= r^{-k-1/2} \cdot J_{k+1/2}(r), \quad dv = r^{k+3/2} \cdot J_{k+1/2}(r) \, dr \\ du &= \left(-k - \frac{1}{2}\right) \cdot r^{-k-3/2} \cdot J_{k+1/2}(r) \, dr \\ &\quad + r^{-k-3/2} \cdot \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot J_{k+1/2}(r) - r \cdot J_{k+3/2}(r)\right] \, dr \\ du &= -r^{-k-1/2} \cdot J_{k+3/2}(r) \, dr \\ v &= r^{k+3/2} \cdot J_{k+3/2}(r) \end{aligned}\right|$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r) \, dr = r \cdot J_{k+1/2}(r) \cdot J_{k+3/2}(r)\Big|_0^\mu + \int_0^\mu r \cdot J_{k+3/2}^2(r) \, dr.$$

Преобразуем уравнение для собственных значений с помощью формулы (C.4) при $r = \mu$

$$\mu \cdot \frac{dJ_{k+1/2}(r)}{dr}\bigg|_{r=\mu} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot J_{k+1/2}(\mu) - \mu \cdot J_{k+3/2}(\mu)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot J_{k+1/2}(\mu),$$

$$k \cdot J_{k+1/2}(\mu) = \mu \cdot J_{k+3/2}(\mu),$$

и подставим полученное соотношение во внеинтегральный член

$$\int_0^\mu r \cdot J^2_{k+1/2}(r)\,dr = k \cdot J^2_{k+1/2}(\mu) + \int_0^\mu r \cdot J^2_{k+3/2}(r)\,dr.$$

Полученный интеграл также возьмём по частям:

$$\left|\begin{array}{ll} u = J^2_{k+3/2}(r), & du = 2\cdot J_{k+3/2}(r)\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(-(k+3/2)\cdot J_{k+3/2}(r) + r\cdot J_{k+1/2}(r)\right)\,dr \\ dv = r\,dr, & v = r^2/2 \end{array}\right|$$

$$\int_0^\mu r \cdot J^2_{k+3/2}(r)\,dr = \frac{k^2}{2}\cdot J^2_{k+1/2}(\mu) + \left(k+\frac{3}{2}\right)\cdot\int_0^\mu r\cdot J^2_{k+3/2}(r)\,dr - \int_0^\mu r^2\cdot J_{k+1/2}(r)\cdot J_{k+3/2}(r)\,dr.$$

Последний интеграл возьмём по частям:

$$\left|\begin{array}{l} u = r^{k+5/2}\cdot J_{k+1/2}(r), \quad dv = r^{-k-1/2}\cdot J_{k+3/2}(r)\,dr \\ du = \left(k+\frac{5}{2}\right)\cdot r^{k+3/2}\cdot J_{k+1/2}(r) + r^{k+3/2}\cdot\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot J_{k+1/2}(r) - r\cdot J_{k+3/2}(r)\right]\,dr \\ du = (2\cdot k+3)\cdot r^{k+3/2}\cdot J_{k+1/2}(r) - r^{k+5/2}\cdot J_{k+3/2}(r)\,dr \\ v = -r^{-k-1/2}\cdot J_{k+1/2}(r) \end{array}\right|$$

$$\int_0^\mu r^2\cdot J_{k+1/2}(r)\cdot J_{k+3/2}(r)\,dr = -\mu^2\cdot J^2_{k+1/2}(\mu) + (2\cdot k+3)\cdot\int_0^\mu r\cdot J^2_{k+1/2}(r)\,dr - \int_0^\mu r^2\cdot J_{k+1/2}(r)\cdot J_{k+3/2}(r)\,dr,$$

$$\int_0^\mu r^2 \cdot J_{k+1/2}(r) \cdot J_{k+3/2}(r)\,dr = -\frac{\mu^2}{2} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu) + \frac{(2\cdot k+3)}{2} \cdot \int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r)\,dr.$$

Подставляя найденные равенства последовательно одно в другое, выражаем норму:

$$0 = \frac{k^2}{2} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu) + \left(k+\frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^\mu r \cdot J_{k+3/2}^2(r)\,dr - \int_0^\mu r^2 \cdot J_{k+1/2}(r) \cdot J_{k+3/2}(r)\,dr,$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_{k+3/2}^2(r)\,dr = -\frac{k^2}{2\cdot k+1} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu) + \frac{2}{2\cdot k+1} \cdot \int_0^\mu r^2 \cdot J_{k+1/2}(r) \cdot J_{k+3/2}(r)\,dr,$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r)\,dr = \frac{k\cdot(k+1)}{2\cdot k+1} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu) + \frac{2}{2\cdot k+1} \cdot \int_0^\mu r^2 \cdot J_{k+1/2}(r) \cdot J_{k+3/2}(r)\,dr,$$

$$\int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r)\,dr = \frac{k\cdot(k+1)-\mu^2}{2\cdot k+1} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu) + \frac{2\cdot k+3}{2\cdot k+1} \cdot \int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r)\,dr,$$

$$\frac{k\cdot(k+1)-\mu^2}{2\cdot k+1} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu) = -\frac{2}{2\cdot k+1} \cdot \int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r)\,dr.$$

В итоге получаем:

$$\int_0^\mu r \cdot J_{k+1/2}^2(r)\,dr = \frac{\mu^2 - k\cdot(k+1)}{2} \cdot J_{k+1/2}^2(\mu). \tag{H.2}$$

Приложение I

Функционал метода Бубнова–Галёркина

Запишем ещё раз функционал для уравнения Эйлера (5.4)

$$I(v) = (L[v], v) - 2 \cdot (f, v).$$

Линейный оператор $L[v]$ для уравнения параболического типа, интересующего нас, имеет вид

$$L[v] = \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \cdot \Delta v.$$

Скалярное произведение $(L[v], v)$ имеет вид

$$(L[v], v) = \int_M \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \cdot \Delta v \right) \cdot v \, dM = \int_M \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v \, dM - a^2 \cdot \int_M \Delta v \cdot v \, dM.$$

Скалярное произведение (f, v) имеет вид

$$(f, v) = \int_M f \cdot v \, dM.$$

Известна формула Остроградского для оператора Лапласа

$$\int_M \Delta v \, dM = \int_S \nabla v \, dS, \tag{I.1}$$

где S — граница подмногообразия M, а dS — её векторный элемент, направленный по внешней нормали. Проинтегрируем по частям второй интеграл

$$\int_M \Delta v \cdot v \, dM = \int_S v \cdot \nabla v \, dS - \int_M \nabla v \cdot \nabla v \, dM. \tag{I.2}$$

Таким образом, исходный функционал можно записать в виде

$$I(\upsilon) = \int_M \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot \upsilon \, dM - a^2 \cdot \int_S \upsilon \cdot \nabla \upsilon \, dS + a^2 \cdot \int_M \nabla \upsilon \cdot \nabla \upsilon \, dM - 2 \cdot \int_M f \cdot \upsilon \, dM.$$

Дадим приращение $\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon$, где $\widehat{\upsilon}$ — точное решение, а ϵ — некоторое малое число. Полное приращение функционала можно записать в виде

$$\begin{aligned} I(\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) - I(\widehat{\upsilon}) = \int_M \frac{\partial(\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon)}{\partial t} \cdot (\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) \, dM \\ - a^2 \cdot \int_S (\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) \cdot \nabla(\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) \, dS \\ + a^2 \cdot \int_M \nabla(\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) \cdot \nabla(\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) \, dM \\ - 2 \cdot \int_M f \cdot (\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) \, dM - \int_M \frac{\partial \widehat{\upsilon}}{\partial t} \cdot \widehat{\upsilon} \, dM \\ + a^2 \cdot \int_S \widehat{\upsilon} \cdot \nabla \widehat{\upsilon} \, dS - a^2 \cdot \int_M \nabla \widehat{\upsilon} \cdot \nabla \widehat{\upsilon} \, dM + 2 \cdot \int_M f \cdot \widehat{\upsilon} \, dM. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, пропорциональными ϵ^2, получим

$$\begin{aligned} I(\widehat{\upsilon} + \epsilon \cdot \upsilon) - I(\widehat{\upsilon}) = \epsilon \cdot \int_M \left[\frac{\partial \widehat{\upsilon}}{\partial t} \cdot \upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot \widehat{\upsilon} \right] dM \\ - \epsilon \cdot a^2 \cdot \int_S \left[\widehat{\upsilon} \cdot \nabla \upsilon + \upsilon \cdot \nabla \widehat{\upsilon} \right] dS \\ + 2 \cdot \epsilon \cdot a^2 \cdot \int_M \nabla \widehat{\upsilon} \cdot \nabla \upsilon \, dM - 2 \cdot \epsilon \cdot \int_M f \cdot \upsilon \, dM. \end{aligned}$$

Если вынести ϵ за скобки и принять во внимание, что ϵ может быть отрицательным, а вот приращение функционала всегда положительно, так как $\widehat{\upsilon}$ — точное решение, то получим в качестве обязательного условия

$$\begin{aligned} \int_M \left[\frac{\partial \widehat{\upsilon}}{\partial t} \cdot \upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot \widehat{\upsilon} \right] dM - a^2 \cdot \int_S \left[\widehat{\upsilon} \cdot \nabla \upsilon + \upsilon \cdot \nabla \widehat{\upsilon} \right] dS \\ + 2 \cdot a^2 \cdot \int_M \nabla \widehat{\upsilon} \cdot \nabla \upsilon \, dM - 2 \cdot \int_M f \cdot \upsilon \, dM = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\widehat{\upsilon} \approx \upsilon$, и сокращая общий множитель, мы возвращаемся к исходному уравнению. Это означает, что численное решение краевой задачи сводится к минимизации функционала

$$I(\upsilon) = \int_M \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot \upsilon \, dM - a^2 \cdot \int_S \upsilon \cdot \nabla \upsilon \, dS + a^2 \cdot \int_M \nabla \upsilon \cdot \nabla \upsilon \, dM - 2 \cdot \int_M f \cdot \upsilon \, dM \to \min. \quad \text{(I.3)}$$

Множитель 2 при линейном члене $\int_M f \cdot \upsilon dM$ сохраняем сознательно: именно он обеспечивает, что условие минимума $\delta I = 0$ возвращает исходное уравнение, а не уравнение с лишним множителем $1/2$ (при дифференцировании квадратичные члены дают множитель 2, и линейный член должен иметь такой же).

Перейдём к разделению на стационарную и нестационарную задачи. Принципиально важно проводить это разделение и последующую дискретизацию по времени на уровне *уравнения*, а не функционала: производная по времени не является самосопряжённым оператором, поэтому прямая подстановка $\upsilon = \psi(M) \cdot \phi(t)$ в функционал привела бы к неверным коэффициентам. Запишем слабую форму уравнения $L[u] = f$, полученную выше интегрированием по частям

$$\int_M \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \upsilon \, dM + a^2 \cdot \int_M \nabla u \cdot \nabla \upsilon \, dM - a^2 \cdot \int_S \upsilon \cdot \nabla u \, dS = \int_M f \cdot \upsilon \, dM, \quad \text{(I.4)}$$

которая должна выполняться для произвольной пробной функции υ.

Стационарное уравнение с граничными условиями Дирихле и/или Неймана

Если $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, временной член исчезает, и в силу симметрии пространственного оператора слабая форма (I.4) эквивалентна минимизации функционала

$$a^2 \cdot \int_M \nabla \upsilon \cdot \nabla \upsilon \, dM - 2 \cdot \int_M f \cdot \upsilon \, dM - a^2 \cdot \int_S \upsilon \cdot \nabla \upsilon \, dS \to \min . \quad \text{(I.5)}$$

Нестационарное уравнение с граничными условиями Дирихле и/или Неймана

Производную по времени дискретизируем неявной схемой Эйлера с шагом Δt, применяя её к слабой форме уравнения: $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t}$, где u_n — решение на текущем временном слое, а u_{n-1} — на предыдущем. Подставив это в (I.4) и домножив на Δt, получаем уравнение для шага по времени

$$\int_M (u_n - u_{n-1}) \cdot \upsilon \, dM + \Delta t \cdot a^2 \cdot \int_M \nabla u_n \cdot \nabla \upsilon \, dM - \Delta t \cdot a^2 \cdot \int_S \upsilon \cdot \nabla u_n \, dS = \Delta t \cdot \int_M f \cdot \upsilon \, dM.$$

Это уравнение, в свою очередь, является условием минимума функционала

$$\int_M \upsilon_n^2 \, dM + \Delta t \cdot a^2 \cdot \int_M \nabla \upsilon_n \cdot \nabla \upsilon_n \, dM - 2 \cdot \int_M [\Delta t \cdot f + \upsilon_{n-1}] \cdot \upsilon_n \, dM - \Delta t \cdot a^2 \cdot \int_S \upsilon_n \cdot \nabla \upsilon_n \, dS \to \min . \quad \text{(I.6)}$$

Таким образом, нестационарное уравнение сведено к последовательному решению стационарных задач: на каждом шаге по известному υ_{n-1} находится υ_n.

Матричная форма

Дискретизируем пробную функцию по узлам сетки: $v = \sum_i q_i \cdot \phi_i(M)$, где $\phi_i(M)$ — базисные функции, а $\overrightarrow{q} = (q_0, \ldots, q_n)^T$ — вектор узловых значений. Подстановка превращает каждый интеграл функционала в квадратичную или линейную форму по $\overrightarrow{q}$, а их коэффициенты собираются в матрицы:

$$\begin{aligned} \int_M \nabla v \cdot \nabla v \, dM &= \overrightarrow{q}^T \cdot K \cdot \overrightarrow{q}, \\ \int_M v \cdot v \, dM &= \overrightarrow{q}^T \cdot D \cdot \overrightarrow{q}, \\ \int_M f \cdot v \, dM &= \overrightarrow{F}^T \cdot \overrightarrow{q} \end{aligned} \tag{I.7}$$

где K — матрица жёсткости (интеграл от произведения градиентов), D — матрица демпфирования (интеграл от произведения пробных функций), $\overrightarrow{F}$ — вектор нагрузки (интеграл от источника); матрицы K и D симметричны. Граничный интеграл $-a^2 \int_S v \cdot \nabla v \, dS$ в матрицу не сворачивается: это поверхностный член, который в дискретной форме входит только в уравнения граничных узлов (у внутреннего узла пробная функция на границе равна нулю) и определяется самим граничным условием.

Дискретную систему получаем по методу Бубнова–Галёркина: подставляем $v = \sum_i q_i \phi_i$ в слабую форму (I.4) и поочерёдно берём пробные функции ϕ_j. Для **стационарного** уравнения это даёт систему

$$a^2 K \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{F} + a^2 \overrightarrow{s}, \tag{I.8}$$

где $\overrightarrow{s}$ — вектор узловых граничных потоков. Сам поток здесь ничем не задаётся — что с ним делать, определяет тип граничного условия. Учёт граничных условий — задача непростая, и подробно она разобрана в отдельных приложениях: «Учёт граничных условий Дирихле» и «Учёт граничных условий Неймана».

Для **нестационарного** уравнения (неявная схема Эйлера, см. (I.6)) система на шаге по времени принимает вид

$$\left[D + \Delta t \cdot a^2 K\right] \cdot \overrightarrow{q}_n = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1} + \Delta t \cdot a^2 \overrightarrow{s}. \tag{I.9}$$

Приложение J

Пример применения функционала

Рассмотрим, как функционал метода Бубнова–Галёркина из приложения I применяется на практике: разберём одномерный пример от начала до конца — от пробных функций до системы линейных уравнений в матричной форме.

Решаем уравнение теплопроводности $L[u] = f$, где параболический оператор $L = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u$, на отрезке $[x_0, x_4]$. На концах зададим граничные условия Неймана (1.14) — заданы потоки $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_0} = g_0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_4} = g_4$. Доведём функционал Бубнова–Галёркина до матричной формы и подставим эти условия.

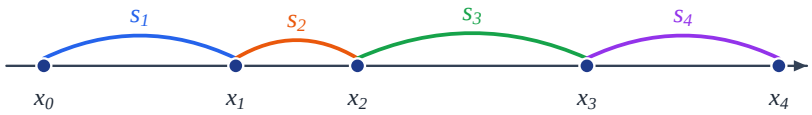

Рис. J.1. Одномерная сетка примера: четыре симплекса-отрезка $s_1, \ldots, s_4$ и пять узлов $x_0, \ldots, x_4$; длины отрезков обозначаются $l_{(i)(i+1)}$.

Возьмём четыре симплекса-отрезка s_1, s_2, s_3, s_4, три внутренние точки x_1, x_2, x_3 и две граничные точки x_0, x_4 (рисунок J.1). Пробные функции для симплексов-отрезков примут вид

$$
\begin{aligned}
\upsilon_{(0)(1)}(x) &= q_0 \cdot \phi_0(x) + q_1 \cdot \phi_1(x) \\
\upsilon_{(1)(2)}(x) &= q_1 \cdot \phi_1(x) + q_2 \cdot \phi_2(x) \\
\upsilon_{(2)(3)}(x) &= q_2 \cdot \phi_2(x) + q_3 \cdot \phi_3(x) \\
\upsilon_{(3)(4)}(x) &= q_3 \cdot \phi_3(x) + q_4 \cdot \phi_4(x)
\end{aligned}
$$

Функции «крышки» и их производные для симплексов-отрезков имеют вид

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= a_0 + b_0 \cdot x \quad & \phi_0'(x) &= b_0 \\
\phi_1(x) &= a_1 + b_1 \cdot x \quad & \phi_1'(x) &= b_1 \\
\phi_2(x) &= a_2 + b_2 \cdot x \quad & \phi_2'(x) &= b_2 \\
\phi_3(x) &= a_3 + b_3 \cdot x \quad & \phi_3'(x) &= b_3 \\
\phi_4(x) &= a_4 + b_4 \cdot x \quad & \phi_4'(x) &= b_4
\end{aligned}
$$

Коэффициенты принимают следующие значения. Введём обозначение $l_{(i)(i+1)} = x_{i+1} - x_i$ для длины симплекса между точками x_i и x_{i+1}.

Коэффициенты «крышек» для произвольного симплекса между точками x_i и x_{i+1} выводятся так же, как в разделе «Пробные функции», и равны

$$a_i = \frac{x_{i+1}}{l_{(i)(i+1)}} \quad b_i = \frac{-1}{l_{(i)(i+1)}}$$
$$a_{i+1} = \frac{-x_i}{l_{(i)(i+1)}} \quad b_{i+1} = \frac{1}{l_{(i)(i+1)}}$$

Для краевых «крышек» ϕ_0 и ϕ_4 берётся соответствующая половина. Подставив эти коэффициенты, сразу запишем пробные функции на каждом симплексе.

Подставим коэффициенты в пробные функции и выразим их относительно x:

Для симплекса s_1:

$$\upsilon_{(0)(1)}(x) = q_0 \cdot \phi_0(x) + q_1 \cdot \phi_1(x) = q_0 \cdot \left(\frac{x_1}{l_{(0)(1)}} - \frac{x}{l_{(0)(1)}}\right) + q_1 \cdot \left(\frac{-x_0}{l_{(0)(1)}} + \frac{x}{l_{(0)(1)}}\right) = \frac{1}{l_{(0)(1)}}\left[q_0 \cdot (x_1 - x) + q_1 \cdot (x - x_0)\right]$$

Для симплекса s_2:

$$\upsilon_{(1)(2)}(x) = q_1 \cdot \phi_1(x) + q_2 \cdot \phi_2(x) = q_1 \cdot \left(\frac{x_2}{l_{(1)(2)}} - \frac{x}{l_{(1)(2)}}\right) + q_2 \cdot \left(\frac{-x_1}{l_{(1)(2)}} + \frac{x}{l_{(1)(2)}}\right) = \frac{1}{l_{(1)(2)}}\left[q_1 \cdot (x_2 - x) + q_2 \cdot (x - x_1)\right]$$

Для симплекса s_3:

$$\upsilon_{(2)(3)}(x) = q_2 \cdot \phi_2(x) + q_3 \cdot \phi_3(x) = q_2 \cdot \left(\frac{x_3}{l_{(2)(3)}} - \frac{x}{l_{(2)(3)}}\right) + q_3 \cdot \left(\frac{-x_2}{l_{(2)(3)}} + \frac{x}{l_{(2)(3)}}\right) = \frac{1}{l_{(2)(3)}}\left[q_2 \cdot (x_3 - x) + q_3 \cdot (x - x_2)\right]$$

Для симплекса s_4:

$$\upsilon_{(3)(4)}(x) = q_3 \cdot \phi_3(x) + q_4 \cdot \phi_4(x) = q_3 \cdot \left(\frac{x_4}{l_{(3)(4)}} - \frac{x}{l_{(3)(4)}}\right) + q_4 \cdot \left(\frac{-x_3}{l_{(3)(4)}} + \frac{x}{l_{(3)(4)}}\right) = \frac{1}{l_{(3)(4)}}\left[q_3 \cdot (x_4 - x) + q_4 \cdot (x - x_3)\right]$$

Найдём производные пробных функций по x:

Для симплекса s_1:

$$\upsilon'_{(0)(1)}(x) = \frac{1}{l_{(0)(1)}}(q_1 - q_0)$$

Для симплекса s_2:

$$\upsilon'_{(1)(2)}(x) = \frac{1}{l_{(1)(2)}}(q_2 - q_1)$$

Для симплекса s_3:

$$\upsilon'_{(2)(3)}(x) = \frac{1}{l_{(2)(3)}}(q_3 - q_2)$$

Для симплекса s_4:

$$\upsilon'_{(3)(4)}(x) = \frac{1}{l_{(3)(4)}}(q_4 - q_3)$$

Вычислим квадраты пробных функций:
Для симплекса s_1:

$$\upsilon^2_{(0)(1)}(x) = \frac{1}{l^2_{(0)(1)}}\left[q_0 \cdot (x_1 - x) + q_1 \cdot (x - x_0)\right]^2$$
$$= \frac{1}{l^2_{(0)(1)}}\left[q_0^2(x_1 - x)^2 + 2q_0q_1(x_1 - x)(x - x_0) + q_1^2(x - x_0)^2\right]$$

Для симплекса s_2:

$$\upsilon^2_{(1)(2)}(x) = \frac{1}{l^2_{(1)(2)}}\left[q_1 \cdot (x_2 - x) + q_2 \cdot (x - x_1)\right]^2$$
$$= \frac{1}{l^2_{(1)(2)}}\left[q_1^2(x_2 - x)^2 + 2q_1q_2(x_2 - x)(x - x_1) + q_2^2(x - x_1)^2\right]$$

Для симплекса s_3:

$$\upsilon^2_{(2)(3)}(x) = \frac{1}{l^2_{(2)(3)}}\left[q_2 \cdot (x_3 - x) + q_3 \cdot (x - x_2)\right]^2$$
$$= \frac{1}{l^2_{(2)(3)}}\left[q_2^2(x_3 - x)^2 + 2q_2q_3(x_3 - x)(x - x_2) + q_3^2(x - x_2)^2\right]$$

Для симплекса s_4:

$$\upsilon^2_{(3)(4)}(x) = \frac{1}{l^2_{(3)(4)}}\left[q_3 \cdot (x_4 - x) + q_4 \cdot (x - x_3)\right]^2$$
$$= \frac{1}{l^2_{(3)(4)}}\left[q_3^2(x_4 - x)^2 + 2q_3q_4(x_4 - x)(x - x_3) + q_4^2(x - x_3)^2\right]$$

Вычислим квадраты производных пробных функций:
Для симплекса s_1:

$$\left(\upsilon'_{(0)(1)}(x)\right)^2 = \frac{1}{l^2_{(0)(1)}}(q_1 - q_0)^2 = \frac{1}{l^2_{(0)(1)}}\left(q_0^2 - 2q_0q_1 + q_1^2\right)$$

Для симплекса s_2:

$$\left(\upsilon'_{(1)(2)}(x)\right)^2 = \frac{1}{l^2_{(1)(2)}}(q_2 - q_1)^2 = \frac{1}{l^2_{(1)(2)}}\left(q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2\right)$$

Для симплекса s_3:

$$\left(\upsilon'_{(2)(3)}(x)\right)^2 = \frac{1}{l^2_{(2)(3)}}(q_3 - q_2)^2 = \frac{1}{l^2_{(2)(3)}}\left(q_2^2 - 2q_2q_3 + q_3^2\right)$$

Для симплекса s_4:

$$\left(\upsilon'_{(3)(4)}(x)\right)^2 = \frac{1}{l^2_{(3)(4)}}(q_4 - q_3)^2 = \frac{1}{l^2_{(3)(4)}}\left(q_3^2 - 2q_3q_4 + q_4^2\right)$$

Запишем линейную аппроксимацию функции источника $f(x)$ на каждом симплексе согласно (6.36). В нашем примере источник действует только на внутренних симплексах: на крайних он тождественно равен нулю.

Для симплекса s_1 (между x_0 и x_1):

Поскольку функция плотности тепловых источников тождественно равна нулю на этом интервале:

$$\widetilde{f}_{(0)(1)}(x) = 0.$$

Для симплекса s_2 (между x_1 и x_2):

$$\widetilde{f}_{(1)(2)}(x) = e_1^{(1)(2)} + e_2^{(1)(2)} \cdot x,$$

где:

$$e_1^{(1)(2)} = \frac{f_1 \cdot x_2 - f_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{f_1 \cdot x_2 - f_2 \cdot x_1}{l_{(1)(2)}}$$
$$e_2^{(1)(2)} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{f_2 - f_1}{l_{(1)(2)}}$$

Для симплекса s_3 (между x_2 и x_3):

$$\widetilde{f}_{(2)(3)}(x) = e_1^{(2)(3)} + e_2^{(2)(3)} \cdot x,$$

где:

$$e_1^{(2)(3)} = \frac{f_2 \cdot x_3 - f_3 \cdot x_2}{x_3 - x_2} = \frac{f_2 \cdot x_3 - f_3 \cdot x_2}{l_{(2)(3)}}$$
$$e_2^{(2)(3)} = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{f_3 - f_2}{l_{(2)(3)}}$$

Для симплекса s_4 (между x_3 и x_4):

Поскольку функция плотности тепловых источников тождественно равна нулю на этом интервале:

$$\widetilde{f}_{(3)(4)}(x) = 0.$$

Теперь запишем произведение функции источника на соответствующие пробные функции для каждого симплекса.

Для симплекса s_1:

Поскольку $\widetilde{f}_{(0)(1)}(x) = 0$, имеем:

$$\widetilde{f}_{(0)(1)}(x) \cdot \upsilon_{(0)(1)}(x) = 0.$$

Для симплекса s_2:

$$\widetilde{f}_{(1)(2)}(x) \cdot \upsilon_{(1)(2)}(x) = \left(e_1^{(1)(2)} + e_2^{(1)(2)} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{l_{(1)(2)}} \left[q_1 \cdot (x_2 - x) + q_2 \cdot (x - x_1)\right].$$

Подставляя значения $e_1^{(1)(2)}$ и $e_2^{(1)(2)}$:

$$\widetilde{f}_{(1)(2)}(x) \cdot \upsilon_{(1)(2)}(x) = \frac{1}{l_{(1)(2)}^2} \left[(f_1 \cdot x_2 - f_2 \cdot x_1) + (f_2 - f_1) \cdot x\right] \cdot \left[q_1 \cdot (x_2 - x) + q_2 \cdot (x - x_1)\right].$$

Преобразуем первый множитель:

$$(f_1 \cdot x_2 - f_2 \cdot x_1) + (f_2 - f_1) \cdot x = f_1 \cdot (x_2 - x) + f_2 \cdot (x - x_1).$$

Следовательно:

$$\widetilde{f}_{(1)(2)}(x) \cdot \upsilon_{(1)(2)}(x) = \frac{1}{l_{(1)(2)}^2} \left[f_1 \cdot (x_2 - x) + f_2 \cdot (x - x_1)\right] \cdot \left[q_1 \cdot (x_2 - x) + q_2 \cdot (x - x_1)\right].$$

Раскроем скобки:

$$\widetilde{f}_{(1)(2)}(x) \cdot \upsilon_{(1)(2)}(x) = \frac{1}{l_{(1)(2)}^2} \Big[f_1 q_1 (x_2 - x)^2 + f_1 q_2 (x_2 - x)(x - x_1) + f_2 q_1 (x - x_1)(x_2 - x) + f_2 q_2 (x - x_1)^2\Big].$$

Для симплекса s_3:

$$\widetilde{f}_{(2)(3)}(x) \cdot \upsilon_{(2)(3)}(x) = \left(e_1^{(2)(3)} + e_2^{(2)(3)} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{l_{(2)(3)}} \left[q_2 \cdot (x_3 - x) + q_3 \cdot (x - x_2)\right].$$

По аналогии с симплексом s_2:

$$\widetilde{f}_{(2)(3)}(x) \cdot \upsilon_{(2)(3)}(x) = \frac{1}{l_{(2)(3)}^2} \left[f_2 \cdot (x_3 - x) + f_3 \cdot (x - x_2)\right] \cdot \left[q_2 \cdot (x_3 - x) + q_3 \cdot (x - x_2)\right].$$

Раскроем скобки:

$$\widetilde{f}_{(2)(3)}(x)\cdot\upsilon_{(2)(3)}(x)=\frac{1}{l_{(2)(3)}^2}\Big[f_2q_2(x_3-x)^2 + f_2q_3(x_3-x)(x-x_2)+f_3q_2(x-x_2)(x_3-x)+f_3q_3(x-x_2)^2\Big].$$

Для симплекса s_4:
Поскольку $\widetilde{f}_{(3)(4)}(x)=0$, имеем:

$$\widetilde{f}_{(3)(4)}(x)\cdot\upsilon_{(3)(4)}(x)=0.$$

Перейдём к граничному члену. Граница одномерной области — две точки x_0 и x_4, поэтому поверхностный интеграл сводится к сумме по граничным узлам:

$$\int_S \upsilon\cdot\nabla\upsilon\,dS=q_0\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=x_0}+q_4\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=x_4}.$$

Поскольку в этом примере заданы условия Неймана, нормальная производная на границе известна: $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=x_0}=g_0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=x_4}=g_4$. Этот член входит только в уравнения граничных узлов и переносится в правую часть как вектор потока; в матрицу системы он не входит.

Интеграл жёсткости для каждого симплекса вычисляется как интеграл квадрата производной пробной функции. Поскольку производные пробных функций являются константами, интегрирование сводится к умножению на длину симплекса.

Согласно локальной формуле из раздела «Матрица жёсткости 1D», для каждого симплекса этот интеграл равен $\frac{1}{l_{(i)(i+1)}}\left(q_i^2-2q_iq_{i+1}+q_{i+1}^2\right)$.

Общий интеграл жёсткости по всей области M равен сумме интегралов по всем симплексам:

$$\begin{aligned}\int_M(\nabla\upsilon)^2\,dM&=\sum_{i=1}^{4}\int_{s_i}\left(\upsilon'(x)\right)^2\,dx\\&=\frac{1}{l_{(0)(1)}}\left(q_0^2-2q_0q_1+q_1^2\right)+\frac{1}{l_{(1)(2)}}\left(q_1^2-2q_1q_2+q_2^2\right)\\&\quad+\frac{1}{l_{(2)(3)}}\left(q_2^2-2q_2q_3+q_3^2\right)+\frac{1}{l_{(3)(4)}}\left(q_3^2-2q_3q_4+q_4^2\right).\end{aligned}$$

Интеграл демпфирования для каждого симплекса вычисляется как интеграл квадрата пробной функции.

Согласно локальной формуле из раздела «Матрица демпфирования 1D», интеграл квадрата пробной функции на симплексе равен $\frac{l_{(i)(i+1)}}{3}\left(q_i^2+q_iq_{i+1}+q_{i+1}^2\right)$.

Общий интеграл демпфирования по всей области M равен сумме интегралов по всем симплексам:

$$\int_M \upsilon^2\,dM = \sum_{i=1}^{4}\int_{s_i}\upsilon^2(x)\,dx$$
$$= \frac{l_{(0)(1)}}{3}\left(q_0^2 + q_0q_1 + q_1^2\right) + \frac{l_{(1)(2)}}{3}\left(q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2\right)$$
$$+ \frac{l_{(2)(3)}}{3}\left(q_2^2 + q_2q_3 + q_3^2\right) + \frac{l_{(3)(4)}}{3}\left(q_3^2 + q_3q_4 + q_4^2\right).$$

Интеграл нагрузки для каждого симплекса вычисляется как интеграл произведения функции источника на пробную функцию.

Согласно локальной формуле из раздела «Вектор нагрузки 1D», на крайних симплексах s_1 и s_4 интеграл равен нулю (источник там тождественно нулевой), а на s_2 и s_3 — соответствующему вкладу локального вектора нагрузки.

Общий интеграл нагрузки по всей области M равен сумме интегралов по всем симплексам:

$$\int_M \widetilde{f}(x)\cdot\upsilon(x)\,dM = \sum_{i=1}^{4}\int_{s_i}\widetilde{f}(x)\cdot\upsilon(x)\,dx$$
$$= 0 + \frac{l_{(1)(2)}}{6}\left(2f_1q_1 + f_1q_2 + f_2q_1 + 2f_2q_2\right)$$
$$+ \frac{l_{(2)(3)}}{6}\left(2f_2q_2 + f_2q_3 + f_3q_2 + 2f_3q_3\right) + 0.$$

Упростив:

$$\int_M \widetilde{f}(x)\cdot\upsilon(x)\,dM = \frac{l_{(1)(2)}}{6}\left(2f_1q_1 + f_1q_2 + f_2q_1 + 2f_2q_2\right)$$
$$+ \frac{l_{(2)(3)}}{6}\left(2f_2q_2 + f_2q_3 + f_3q_2 + 2f_3q_3\right).$$

Запишем все полученные интегралы в матричной форме. Введём вектор неизвестных $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}^T$.

Интеграл жёсткости можно записать в матричном виде:

$$\int_M (\nabla\upsilon)^2\,dM = \overrightarrow{q}^T\cdot K\cdot\overrightarrow{q},$$

где K — матрица жёсткости размером 5×5:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_{(0)(1)}} & -\frac{1}{l_{(0)(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_{(0)(1)}} & \frac{1}{l_{(0)(1)}} + \frac{1}{l_{(1)(2)}} & -\frac{1}{l_{(1)(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_{(1)(2)}} & \frac{1}{l_{(1)(2)}} + \frac{1}{l_{(2)(3)}} & -\frac{1}{l_{(2)(3)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_{(2)(3)}} & \frac{1}{l_{(2)(3)}} + \frac{1}{l_{(3)(4)}} & -\frac{1}{l_{(3)(4)}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l_{(3)(4)}} & \frac{1}{l_{(3)(4)}} \end{pmatrix}. \qquad \text{(J.1)}$$

Матрица K является симметричной и трёхдиагональной.

Интеграл демпфирования можно записать в матричном виде:

$$\int_M \upsilon^2\, dM = \overrightarrow{q}^T \cdot D \cdot \overrightarrow{q},$$

где D — матрица демпфирования размером 5×5:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{l_{(0)(1)}}{3} & \frac{l_{(0)(1)}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{(0)(1)}}{6} & \frac{l_{(0)(1)}}{3} + \frac{l_{(1)(2)}}{3} & \frac{l_{(1)(2)}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{(1)(2)}}{6} & \frac{l_{(1)(2)}}{3} + \frac{l_{(2)(3)}}{3} & \frac{l_{(2)(3)}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{(2)(3)}}{6} & \frac{l_{(2)(3)}}{3} + \frac{l_{(3)(4)}}{3} & \frac{l_{(3)(4)}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_{(3)(4)}}{6} & \frac{l_{(3)(4)}}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица D также является симметричной и трёхдиагональной.
Интеграл нагрузки можно записать в матричном виде:

$$\int_M \widetilde{f}(x) \cdot \upsilon(x)\, dM = \overrightarrow{F}^T \cdot \overrightarrow{q},$$

где $\overrightarrow{F}$ — вектор нагрузки размером 5×1:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2f_1 \cdot l_{(1)(2)}}{6} + \frac{f_2 \cdot l_{(1)(2)}}{6} \\ \frac{f_1 \cdot l_{(1)(2)}}{6} + \frac{2f_2 \cdot l_{(1)(2)}}{6} + \frac{2f_2 \cdot l_{(2)(3)}}{6} + \frac{f_3 \cdot l_{(2)(3)}}{6} \\ \frac{f_2 \cdot l_{(2)(3)}}{6} + \frac{2f_3 \cdot l_{(2)(3)}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упростив, получим:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{l_{(1)(2)}}{6}(2f_1 + f_2) \\ \frac{f_1 \cdot l_{(1)(2)}}{6} + \frac{f_2(l_{(1)(2)} + l_{(2)(3)})}{3} + \frac{f_3 \cdot l_{(2)(3)}}{6} \\ \frac{l_{(2)(3)}}{6}(f_2 + 2f_3) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Граничный интеграл, как показано выше, в матрицу не сворачивается — он даёт вектор потока в правую часть, ненулевой только в граничных узлах:

$$a^2 \overrightarrow{s} = a^2 \begin{pmatrix} g_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_4 \end{pmatrix}.$$

Стационарное уравнение
Согласно (I.8), стационарная система имеет вид

$$a^2 K \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{F} + a^2 \overrightarrow{s}.$$

Нестационарное уравнение

Согласно (I.9), нестационарная система:

$$\left[D + \Delta t \cdot a^2 K\right] \cdot \overrightarrow{q}_n = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1} + \Delta t \cdot a^2 \overrightarrow{s}.$$

Обозначения:

- K — матрица жёсткости 5×5,
- D — матрица демпфирования 5×5,
- $\overrightarrow{F}$ — вектор нагрузки 5×1,
- $\overrightarrow{q}$ — вектор неизвестных 5×1 для стационарного случая,
- $\overrightarrow{q}_n$, $\overrightarrow{q}_{n-1}$ — векторы неизвестных на текущем и предыдущем временных слоях,
- a — коэффициент температуропроводности,
- Δt — временной шаг.

Матрицы K и D симметричны и разрежены (трёхдиагональны). Оператор стационарной системы — полная матрица жёсткости $a^2 K$; для чисто неймановой задачи она вырождена ($K \cdot \overrightarrow{1} = 0$), поэтому решение определено с точностью до аддитивной константы и замыкается условием нормировки. Подробнее учёт условий Неймана разобран в приложении «Учёт граничных условий Неймана».

Приложение K

Учёт граничных условий Дирихле

Существует простой и распространённый метод учёта условий Дирихле — прямая подстановка известных граничных значений в систему (его называют методом зачёркивания строки и столбца). Пусть для узла i задано граничное условие $q_i = g_i$, где g_i — известное граничное значение. Тогда над системой $A\overrightarrow{q} = \overrightarrow{P}$ выполняем следующие операции:

1. **Модификация правой части:** Для всех строк $j \neq i$ вычитаем из правой части вклад известного значения q_i: $p_j := p_j - A_{ji} \cdot g_i$.
2. **Обнуление строки и столбца:** Заменяем i-ю строку и i-й столбец матрицы A нулями, за исключением диагонального элемента: $A_{ij} := 0, \quad A_{ji} := 0, \quad j \neq i$.
3. **Установка диагонального элемента:** Устанавливаем диагональный элемент равным единице: $A_{ii} := 1$.
4. **Установка граничного значения:** Заменяем i-й элемент вектора правой части на граничное значение: $p_i := g_i$.

После этих операций i-е уравнение системы принимает вид $1 \cdot q_i = g_i$, что гарантирует выполнение граничного условия.

Вернёмся к нашему одномерному примеру с пятью узлами q_0, q_1, q_2, q_3, q_4. Предположим, что на границах заданы условия Дирихле:

$$q_0 = g_0, \quad q_4 = g_4.$$

Стационарный случай

Исходная система имеет вид:

$$a^2 K \cdot \overrightarrow{q} = \overrightarrow{F}.$$

Матрица a^2K — полная (симметричная, трёхдиагональная); граничные условия учитываются заменой граничных строк.

Обозначим $A = a^2K$ и $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F}$. Применим прямой метод для узлов q_0 и q_4.

Шаг 1: Модификация правой части для внутренних узлов

Для узла q_1 (индекс 1):

$$p_1 := p_1 - A_{10} \cdot g_0 = F_1 - a^2 \cdot \left(-\frac{1}{l_{(0)(1)}}\right) \cdot g_0 = F_1 + \frac{a^2 g_0}{l_{(0)(1)}}.$$

Для узла q_3 (индекс 3):

$$p_3 := p_3 - A_{34} \cdot g_4 = F_3 - a^2 \cdot \left(-\frac{1}{l_{(3)(4)}}\right) \cdot g_4 = F_3 + \frac{a^2 g_4}{l_{(3)(4)}}.$$

Шаги 2–4: Модификация матрицы и правой части для граничных узлов
Для узла q_0 (индекс 0):

- Обнуляем первую строку: $A_{01} := 0$
- Обнуляем первый столбец: $A_{10} := 0$
- Устанавливаем диагональ: $A_{00} := 1$
- Устанавливаем правую часть: $p_0 := g_0$

Для узла q_4 (индекс 4):

- Обнуляем последнюю строку: $A_{43} := 0$
- Обнуляем последний столбец: $A_{34} := 0$
- Устанавливаем диагональ: $A_{44} := 1$
- Устанавливаем правую часть: $p_4 := g_4$

В матрице a^2K граничные строки и столбцы (узлы q_0 и q_4) обнуляются, на диагонали ставится единица; известные значения переносятся в правую часть.

Модифицированный вектор правой части:

$$\widetilde{\overrightarrow{P}} = \begin{pmatrix} g_0 \\ F_1 + \frac{a^2 g_0}{l_{(0)(1)}} \\ F_2 \\ F_3 + \frac{a^2 g_4}{l_{(3)(4)}} \\ g_4 \end{pmatrix}.$$

Примечание: поскольку функция плотности источников тождественно равна нулю на симплексах s_1 и s_4, имеем $F_0 = 0$ и $F_4 = 0$. Однако компоненты F_1, F_2, F_3 могут быть ненулевыми.

Нестационарный случай

Для нестационарного случая система имеет вид:

$$\left[D + \Delta t \cdot a^2 K\right] \cdot \overrightarrow{q}_n = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1}.$$

Обозначим $A = D + \Delta t \cdot a^2 K$ и $\overrightarrow{P} = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1}$. Применяем тот же прямой метод.

Модификация правой части для внутренних узлов

Для узла q_1:

$$p_1 := p_1 - A_{10} \cdot g_0 = \Delta t \cdot F_1 + \sum_j D_{1j} q_{n-1,j} - \left(\frac{l_{(0)(1)}}{6} - \frac{\Delta t \cdot a^2}{l_{(0)(1)}}\right) \cdot g_0.$$

Для узла q_3:

$$p_3 := p_3 - A_{34} \cdot g_4 = \Delta t \cdot F_3 + \sum_j D_{3j} q_{n-1,j} - \left(\frac{l_{(3)(4)}}{6} - \frac{\Delta t \cdot a^2}{l_{(3)(4)}} \right) \cdot g_4.$$

Как и в стационарном случае, граничные строки и столбцы матрицы $D + \Delta t\, a^2 K$ обнуляются, на диагонали ставится единица, а $q_0 = g_0$ и $q_4 = g_4$ уходят в правую часть.

Приложение L

Учёт граничных условий Неймана

Граничные условия Неймана учитываются намного проще, чем Дирихле: заданный на границе поток сразу даёт вектор $\overrightarrow{s}$ (ненулевой только в граничных узлах), который входит только в правую часть системы — матрицу жёсткости a^2K менять не нужно.

Стационарный случай

Для примера с пятью узлами (заданы потоки g_0 и g_4; источник на крайних симплексах нулевой, $F_0 = F_4 = 0$) модифицированный вектор правой части:

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F} + a^2\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} a^2 g_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ a^2 g_4 \end{pmatrix}.$$

Нестационарный случай

Для нестационарной задачи оператор — $D + \Delta t \cdot a^2 K$, а поток входит в правую часть с множителем Δt:

$$\left[D + \Delta t \cdot a^2 K\right] \cdot \overrightarrow{q}_n = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1} + \Delta t \cdot a^2 \overrightarrow{s}.$$

Модифицированный вектор правой части:

$$\overrightarrow{P} = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1} + \Delta t \cdot a^2 \overrightarrow{s} = \Delta t \cdot \overrightarrow{F} + D \cdot \overrightarrow{q}_{n-1} + \begin{pmatrix} \Delta t \cdot a^2 g_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta t \cdot a^2 g_4 \end{pmatrix}.$$

Оператор $D + \Delta t \cdot a^2 K$ уже невырожден (матрица демпфирования D положительно определена, $(D + \Delta t \cdot a^2 K)\,\overrightarrow{1} = D\,\overrightarrow{1} \neq 0$), поэтому нестационарная задача Неймана разрешима даже без условий Дирихле.

Приложение M

Триангуляция методом «разделяй и властвуй»

Это приложение описывает алгоритм триангуляции по схеме «разделяй и властвуй» со слиянием подтриангуляций вдоль общих касательных. Исторически именно он был реализован в проекте первым; в основном тексте описан используемый сейчас подход на основе библиотеки CGAL. Материал ниже сохранён как дополнительный: он полезен для понимания классической схемы и тех трудностей с вырожденными конфигурациями, которые в итоге и привели к смене подхода.

За основу взят алгоритм «разделяй и властвуй» из монографии А. В. Скворцова «Триангуляция Делоне и её применение» с непосредственной перестройкой по Делоне сразу после построения каждого нового треугольника. Алгоритм имеет среднюю и худшую трудоёмкость $O(N \log N)$ относительно числа исходных точек.

Общая схема

Идея алгоритма повторяет классическую парадигму «разделяй и властвуй».

1. Множество точек рекурсивно делится прямой линией на две примерно равные части.
2. Рекурсия продолжается до тех пор, пока в каждой части не останется три или четыре точки — такие конфигурации триангулируются явно.
3. Полученные подтриангуляции попарно сшиваются вдоль общей зоны между их выпуклыми оболочками.
4. При сшивании каждое новое ребро проверяется по условию Делоне, и при необходимости пара смежных треугольников перестраивается заменой диагонали.

Поскольку любая частичная триангуляция, получаемая на промежуточных уровнях рекурсии, является триангуляцией выпуклой оболочки соответствующего подмножества, шаг слияния всегда работает с двумя выпуклыми областями. Это существенно упрощает поиск касательных и контроль непересечения.

Рекурсивное разделение точек

Направление разреза выбирается по форме охватывающего прямоугольника: если он шире, чем выше, точки сортируются и делятся по горизонтальной координате, иначе — по вертикальной. Такой выбор уменьшает длину будущего шва между подтриангуляциями и поэтому уменьшает количество перестроений.

Размер двух получаемых частей подбирается так, чтобы все листовые задачи имели ровно три или четыре точки. Для больших наборов используется деление пополам, а для нескольких малых размеров применяется специальное разбиение «3 и $N-3$», гарантирующее, что в листах рекурсии не появится конфигурация из одной или двух точек. Корректность такого разбиения для любых $N \geq 6$ следует из того, что любое N представимо в виде $3k$, $3(k-1)+4$ или $3(k-2)+4\cdot 2$.

В формализованной записи рекурсивный алгоритм выглядит так.

1. Если число точек $N = 3$ — построить триангуляцию из одного треугольника.
2. Иначе, если $N = 4$, — построить триангуляцию из двух или трёх треугольников.
3. Иначе, если $N = 8$, — разбить множество на две части по четыре точки, рекурсивно применить алгоритм и склеить результаты.
4. Иначе, если $N < 12$, — разбить множество на части из трёх и $N - 3$ точек, рекурсивно применить алгоритм и склеить результаты.
5. Иначе ($N \geq 12$) — разбить множество пополам, на части из $\lfloor N/2 \rfloor$ и $\lceil N/2 \rceil$ точек, рекурсивно применить алгоритм и склеить результаты.

Глубина рекурсии составляет $O(\log N)$, и на каждом уровне суммарная работа линейна по числу точек, что и даёт итоговую трудоёмкость $O(N \log N)$ в среднем и в худшем случаях (рисунок Разделение).

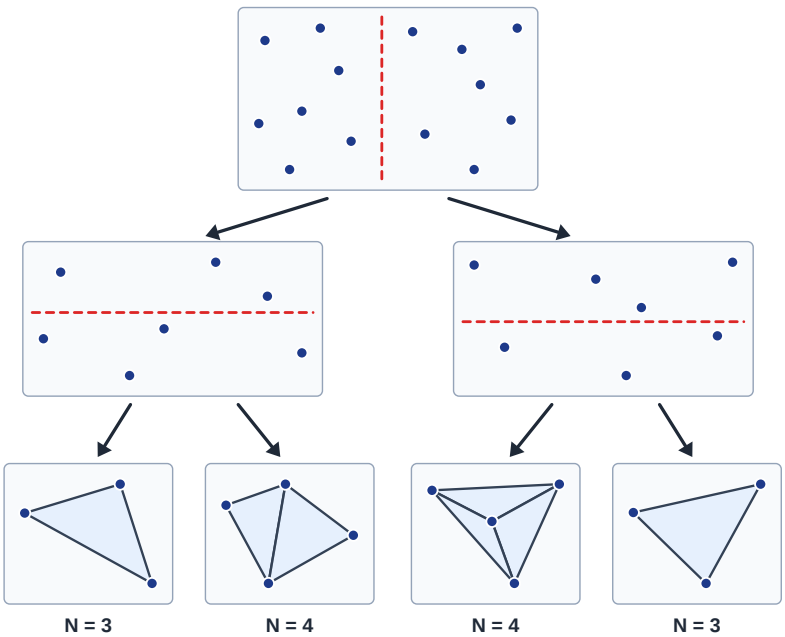

Рис. М.1. Разделение исходного множества точек: выбор направления, разрез, листовые конфигурации из трёх и четырёх точек.

Базовые конфигурации

Для трёх точек существует единственная допустимая триангуляция — один треугольник, построенный непосредственно на этих трёх вершинах. Для четырёх точек возможны два случая в зависимости от их взаимного расположения (рисунок Базовые случаи).

1. *Все четыре точки лежат на выпуклой оболочке.* Четырёхугольник разбивается одной из двух диагоналей. Выбор определяется условием Делоне: проверяется, лежит ли одна из вершин внутри описанной окружности треугольника, построенного на оставшихся трёх точках. Та диагональ, для которой условие выполнено, и закладывается в базовую триангуляцию.

2. *Одна точка находится внутри треугольника, образованного тремя другими.* Внутренняя точка соединяется с каждой из вершин внешнего треугольника, и область разбивается на три треугольника.

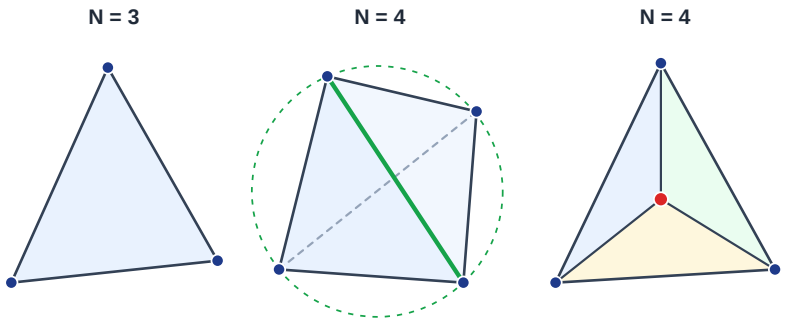

Рис. М.2. Базовые случаи рекурсии: единственный треугольник для трёх точек и две конфигурации для четырёх точек.

Слияние двух подтриангуляций

Слияние — самый содержательный этап алгоритма. Пусть имеется левая и правая подтриангуляции, каждая из которых является триангуляцией Делоне своей выпуклой оболочки. Слияние выполняется в три шага.

Поиск общих касательных. Сначала на двух выпуклых оболочках находятся две общие касательные — нижняя и верхняя. Начальное приближение — ребро, соединяющее самую правую точку левой оболочки с самой левой точкой правой; затем оно итеративно сдвигается по вершинам обеих оболочек, пока не окажется снизу (или сверху) от всех остальных точек двух множеств. Между двумя касательными остаются две цепочки граничных вершин — левая и правая, — пространство между которыми и предстоит заполнить треугольниками.

Заполнение зоны слияния. Нижняя касательная объявляется текущим *базовым ребром*. По обе стороны от него берутся ближайшие вершины двух цепочек, и из них рассматриваются два кандидата на следующий треугольник: один с левой вершиной, второй — с правой. Допустимым считается треугольник, который не выворачивает ориентацию (внутренний угол при базовом ребре меньше развёрнутого) и не накрывает уже построенных частей сетки. Если допустимы оба кандидата, выбирается тот, у которого минимальный угол больше: такой треугольник «более

равносторонний» и с меньшей вероятностью будет перестроен в дальнейшем. Открытая сторона построенного треугольника становится новым базовым ребром, и шаг повторяется, пока базовое ребро не совпадёт с верхней касательной (рисунок Слияние).

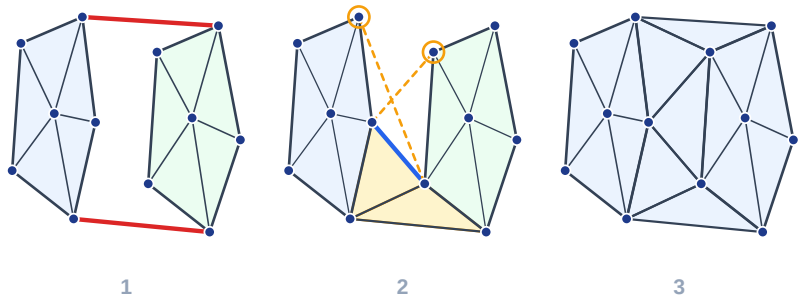

Рис. М.3. Слияние триангуляций: общие касательные (1), заполнение зоны слияния от базового ребра (2), итоговая сетка после перестроений (3).

Немедленная локальная перестройка. После добавления нового треугольника его рёбра проверяются против ранее построенных соседей: если четырёхугольник, образованный новым треугольником и его соседом по ребру, нарушает условие Делоне, выполняется flip-операция. Немедленная перестройка избавляет от отдельного финального прохода по сетке и обычно уменьшает суммарное число перестроений.

Вставка рёбер-ограничений

Алгоритм выше строит триангуляцию Делоне выпуклой оболочки точек, но ничего не знает о границах расчётной области и контурах отверстий. Чтобы заданные рёбра гарантированно присутствовали в сетке, они вставляются в готовую триангуляцию отдельной операцией восстановления рёбер.

Вставка одного ребра выполняется так: находятся все треугольники, которые пересекает отрезок, и удаляются — в сетке образуется многоугольная пустота, которую вставляемый отрезок делит на две цепочки вершин, верхнюю и нижнюю; каждая цепочка независимо заполняется треугольниками заново, и ребро оказывается в сетке (рисунок Вставка ребра). После вставки ребро помечается как *ограничение*: flip через него запрещён, поэтому никакая последующая перестройка его не разрушит, а условие Делоне вблизи него может законно нарушаться.

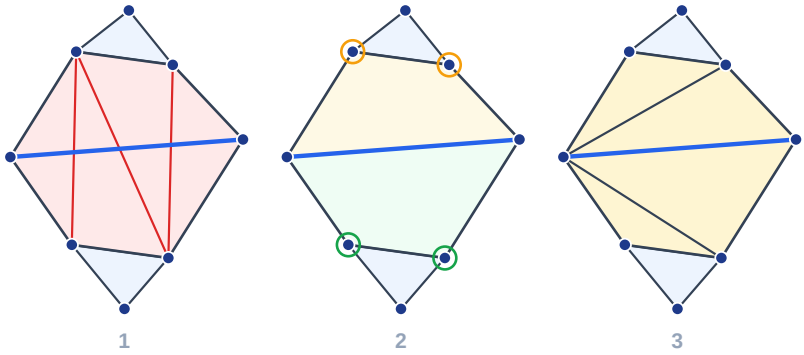

Рис. М.4. Вставка непересекаемого ребра: удаление пересечённых треугольников, образование двух цепочек, заполнение новыми треугольниками.

В текущей версии проекта ровно эту операцию выполняет CGAL (метод *insert_constraint*), но логика внутри неё та же.

Почему от схемы отказались

Схема «разделяй и властвуй» опирается на построение выпуклых оболочек, поиск касательных и контроль ориентации — все эти операции сводятся к знаковым геометрическим предикатам, вычисляемым в арифметике с плавающей точкой. На «хороших» входах (общего положения) это работает, но на регулярных, осесимметричных данных, типичных для расчётной области в форме квадрата, возникают *вырожденные* конфигурации: множество точек на одной вертикали или горизонтали (коллинеарность) и прямоугольные четвёрки точек, лежащие на одной окружности (конциклличность). В этих случаях значение предиката оказывается точным нулём, а вычисление в арифметике с плавающей точкой даёт вместо нуля «шум» произвольного знака. Поиск касательных и слияние начинают противоречить сами себе: вдоль границы появляются плоские (нулевой площади) треугольники-«веера», нарушается условие Делоне. Именно эти трудности привели к переходу на библиотечный подход с точными предикатами, описанный в основном тексте.

Приложение N

Эллиптические уравнения: сведение к стационарной задаче

Основной текст книги посвящён нестационарному тепловому полю — уравнению параболического типа. Однако те же конечно-элементные построения без каких-либо изменений переносятся на широкий класс *эллиптических* краевых задач, в которых время либо отсутствует в постановке, либо нас не интересует переходный процесс, а нужно лишь установившееся (стационарное) состояние поля. Это приложение показывает, как такая задача приводится к более простому виду и решается уже рассмотренными методами: сборкой матрицы жёсткости и итерационным решением разреженной симметричной положительно определённой системы.

От параболического уравнения к эллиптическому

Исходное нестационарное уравнение (1.8) имеет вид

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta T(M,t) + f(M,t).$$

Если интересует только установившееся поле, то производная по времени обращается в нуль, $\partial T/\partial t = 0$, и уравнение теряет временную координату, превращаясь в *эллиптическое* уравнение Пуассона

$$a^2 \cdot \Delta T(M) + f(M) = 0, \qquad \text{или} \qquad -\Delta T(M) = \frac{1}{a^2} f(M). \tag{N.1}$$

В частном случае отсутствия источников ($f \equiv 0$) оно вырождается в однородное уравнение Лапласа

$$\Delta T(M) = 0. \tag{N.2}$$

Принципиально важно, что искомая функция здесь зависит только от геометрии M, но не от времени: задача из эволюционной стала чисто пространственной.

Пример: электростатическое поле

Каноническим эллиптическим уравнением является уравнение электростатики. Потенциал электрического поля $V(M)$ в среде без объёмных зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа, а при наличии плотности заряда ρ — уравнению Пуассона

$$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon}, \tag{N.3}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды [Ф/м]. Сопоставление с (N.1) показывает полное соответствие вплоть до размерностей: потенциал V [В] играет роль температуры T [К], отношение ρ/ε с плотностью заряда ρ [Кл/м^3] имеет размерность [В/м^2] и играет роль плотности источников f/a^2 размерности [К/м^2], а коэффициент a^2 заменяется единицей. Следовательно, та же программа, что решает стационарную задачу теплопроводности, без изменений вычисляет и электростатическое поле.

Рассмотрим показательную конфигурацию из трёх проводников — «фаз», — каждый из которых поддерживается при своём напряжении V_1, V_2, V_3. Проводники задают на своих границах условие Дирихле $V|_{\partial\Omega_k} = V_k$; внешняя граница расчётной области полагается изолированной, что отвечает однородному условию Неймана $\partial V/\partial n = 0$. Наличие хотя бы одного проводника делает конечно-элементную систему невырожденной, и она решается тем же предобусловленным методом сопряжённых градиентов.

Рассчитанная картина поля показана на рисунке Поле трёх проводников: эквипотенциали и силовые линии образуют взаимно ортогональную сетку; силовые линии выходят из положительной фазы и заканчиваются на отрицательных.

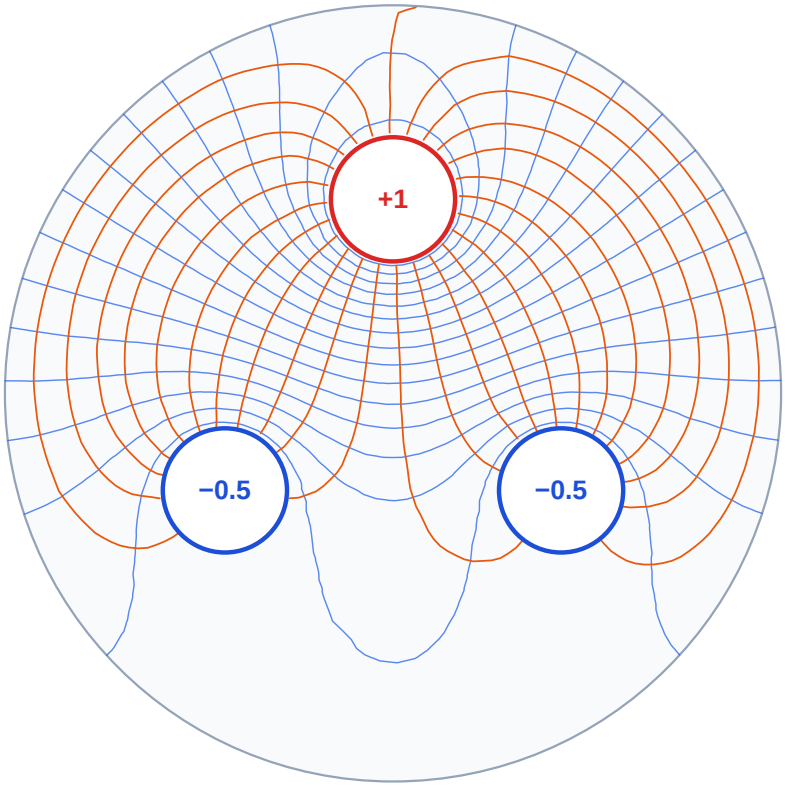

Рис. N.1. Картина поля трёх проводников ($V = +1, -0.5, -0.5$): синие линии — эквипотенциали, оранжевые — силовые; расчёт на сетке из 6486 треугольников.

Литература

[1] Андре Анго. *Математика для электро- и радиоинженеров.* М.: Высшая школа, 1967. 780 с.

[2] Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

[3] Стрэнг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов.* М.: Мир, 1977. 349 с.

[4] Скворцов А.В. *Триангуляция Делоне и её применение.* Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. 128 с. ISBN 5-7511-1501-5.